Übungen zur Grundlagen der Technischen Informatik

Übung 13 – Arithmetik

Florian Frank

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Wintersemester 2018/19

FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Was machen wir heute?

Organisatorisches: Vorlesungsevaluation

Was machen wir heute?

Organisatorisches: Vorlesungsevaluation

Aufgabe 1 – Addierer/Subtrahierer

Was machen wir heute?

Organisatorisches: Vorlesungsevaluation

Aufgabe 1 – Addierer/Subtrahierer

Aufgabe 2 – Mehr-Operanden-Addierer

Was machen wir heute?

Organisatorisches: Vorlesungsevaluation

Aufgabe 1 – Addierer/Subtrahierer

Aufgabe 2 – Mehr-Operanden-Addierer

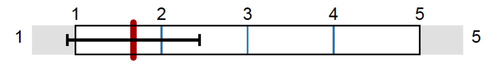
Aufgabe 3 – Arithmetik

Organisatorisches: Vorlesungsevaluation

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

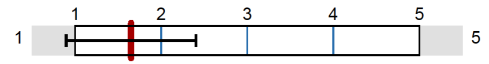
Organisatorisches – Vorlesungsevaluation (I)

3. Hauptfragen zu Lehrveranstaltung und Übungsleiterin/Übungsleiter



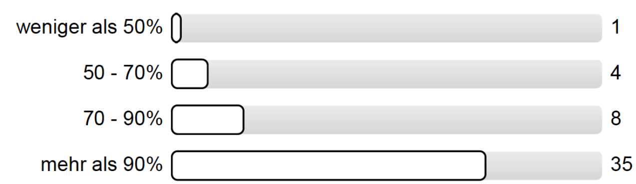
mw=1,67
s=0,77

5. Weitere Fragen zu Lehrveranstaltung und Übungsleiterin/Übungsleiter



mw=1,65
s=0,75

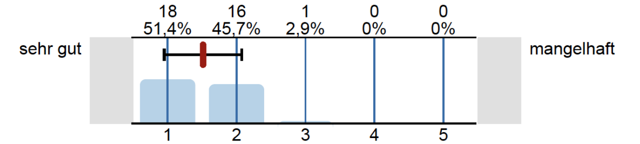
2.7) Ich besuche etwa . . . . Prozent dieser Übung.



n=48

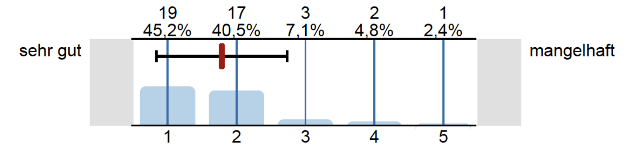
Organisatorisches – Vorlesungsevaluation (II)

3.1) ►► Die Übung entspricht den im Modulhandbuch eingetragenen Inhalten und Kompetenzen.



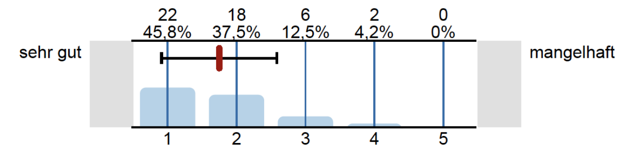
n=35
mw=1,51
s=0,56
E.=13

3.2) ►► Wie ist die Einpassung in den Studienverlauf Ihres Studienganges?



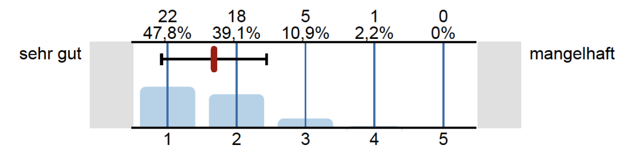
n=42
mw=1,79
s=0,95
E.=6

3.3) ►► Wie ist die Übung selbst strukturiert?



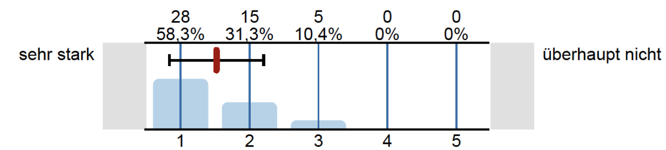
n=48
mw=1,75
s=0,84

3.4) ►► Wie ist die Übung inhaltlich und organisatorisch mit der zugehörigen Vorlesung abgestimmt?



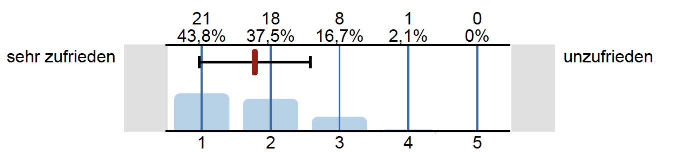
n=46
mw=1,67
s=0,76
E.=2

3.5) ►► Die Übungsleiterin/Der Übungsleiter wirkt engagiert und motiviert bei der Durchführung der Übung.



n=48
mw=1,52
s=0,68

3.6) ►► Wie zufrieden sind Sie insgesamt mit der Übung:



n=48
mw=1,77
s=0,81

Organisatorisches – Vorlesungsevaluation (III)

An der Übung hat mir besonders gut gefallen ...

- Wiederholung von Themen aus der Vorlesung, sowie viele Übungsaufgaben
- trägt deutlich zum Verständnis der VL bei
- 1 und 0
- Alles ist sehr gut verständlich und hilfreich
- Ausfuhrlich erklärt
- Der Tutor ist sehr engagiert. Die Übungsgruppen habe eine sinnvolle Anzahl an Teilnehmern. Das Angebot hilft, den Vorlesungsstoff zu uben und zu festigen. Man erhält eine physische Kopie des Übungsblattes.
- Die Art des Unterrichts, Lieblings Dozent.
- Es wird immer erst noch einmal die zugrundeliegende Grammatik wiederholt und danach erst die Aufgaben gemacht.
- Fragen werden beantwortet. Wenn nicht sofort dann in der nächsten Übungsstunde.
- Gute Beispiel zum Inhalt der Vorlesung.
- Lösungen und step-to-step Lösung in powerpoint Form sind sehr gut.

Organisatorisches – Vorlesungsevaluation (IV)

An der Übung hat mir besonders gut gefallen ...

- Mein Tutor (Florian Frank) ist unglaublich engagiert und motiviert! Einer der besten Tutoren, die ich je hatte. Die Tafelanschriften sind super; lesbar, farbig, ubersichtlich. Weiter so!
- Sehr gute Folien mit Erklärung und Lösung zu jeder Übung! Erleichtert das Vor- oder Nachbereiten massiv
- Wiederholung der teilweise zu theoretischen Vorlesung
- Übungsaufgaben sind nah an Klausuraufgaben, ähnlich gestellt etc
- Sehr gute Tafelubungsfolien
- Gut Strukturiert

Organisatorisches – Vorlesungsevaluation (V)

An der Übung hat mir nicht so gut gefallen und ich schlage zur Verbesserung vor ...

- Das Rechnen mit Fließkommazahlen ist etwas, das entweder garnicht oder ausfuhrlicher besprochen werden sollte.
  Die Komplexität dessen ist zu hoch, als dass dafur die wenigen Beispiele ausreichen, die in den Übungen ind noch dazu kurzer Zeit präsentiert wurden.
- Der "Dozierstil der einzelnen Übungsleiter ist SEHR verschieden.
- Der Umfang der Aufgaben ist fur die Art und Weise wie die Übung gehalten wird zu groß! Die Aufgaben sollen, laut Aussage des Übungsleiters, in der Übung gemeinsam bearbeitet werden. Dafur reicht die Zeit nicht und der Tutor uberzieht nahezu jedes Mal mindestens 20 Minuten. Die Meiste Zeit wird darauf verwendet die Aufgaben niederzuschreiben. Dadurch wird man so uberfahren, dass es unmöglich fur mich ist Fragen zu Lucken zu stellen, da ich weiß, dass zu wenig Zeit fur die Übung zur Verfugung steht! Eventuell ist es zielfuhrender, wenn weniger Aufgaben gestellt werden, welche dann intensiver besprochen werden können. (*mehrfache Vorkommen*)

Organisatorisches – Vorlesungsevaluation (VI)

An der Übung hat mir nicht so gut gefallen und ich schlage zur Verbesserung vor ...

- Die Stoffverteilung ist sehr ungleichmäßig und tendiert auf zu viel Stoff pro Übung, bzw. zu viele Aufgaben pro Übung. Weniger, dafur detailliertere Übungen wären den Jetzigen Vorzuziehen
- Die Folien könnten ggf. schon etwas vorher online sein, hat man zB am Montag seine Übung und möchte am Dienstag oder Mittwoch nochmal etwas in den Folien nachsehen, geht das nicht..
- Die Übungen sind so, das zumindestens bei uns keiner die Aufgaben in der Übung gemacht hat, sonder nur in der Übung mitgemacht. Ausserdem wären (mini)Klausur Lösungen gut
- In manchen Wochen zu wenig Zeit fur die Übungsaufgaben
- Manche relevanten Inhalte der Vorlesung werden in der Übung nicht explizit behandelt (hier v.a. JPEG).
- Langsamer, freier und vorbereiter
- Wir hängen eine bis zwei Wochen hinter der Vorlesung her
- Keine

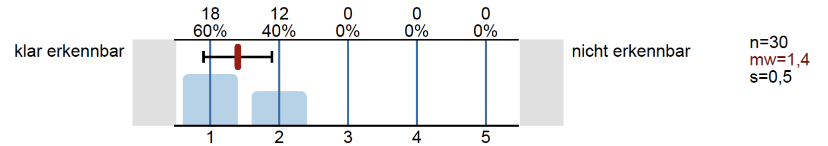
Organisatorisches – Vorlesungsevaluation (VII)

Zur Lehrveranstaltung möchte ich im Übrigen anmerken ...

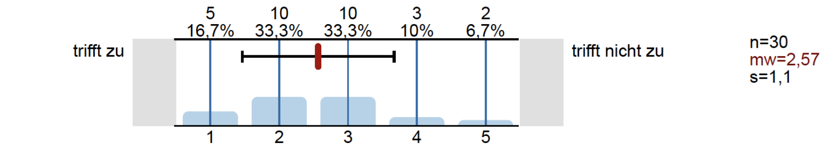
- All in all a very useful course that is worth attending. Very helpful in clearing up topics which have been cut short in the lecture or just haven't been understood by the student
- Das ist jetzt mein 3. Mal, die Übung macht so viel Spaß, dass ich einfach mehrmals kommen wollte
- Der Tutor scheint ein wirklicher Streber zu sein :)
- Die Übungen und die Vorlesung treffen sich inhaltlich schon, jedoch fuhle ich mich einzig durch durcharbeiten der Vorlesungsmaterialien nicht auf die Aufgaben vorbereitet. Es bedarf weiterer Ressourcen sich hier effektiv vorzubereiten bzw die Hausaufgaben tatsächlich im Vorhinhein zuhause zu erledigen.
- Florian macht phänomenale Tafelanschriften!
- Florian Frank ist ein hervorragender Tutor
- Zu viel Stoff, dass man selbst etwas lösen könnte. Da es aber insgesamt nur 5ECTS fur GTI-VL gibt, kann man da unmöglich noch zusätzliche Zeit reinstecken die Übungsaifgaben schon im Voraus zu lösen

Organisatorisches – Vorlesungsevaluation

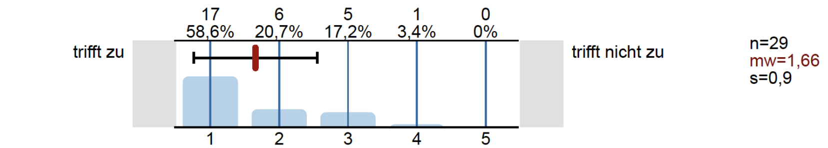
5.2) Zielsetzungen und Schwerpunkte des Übungsinhalts sind:



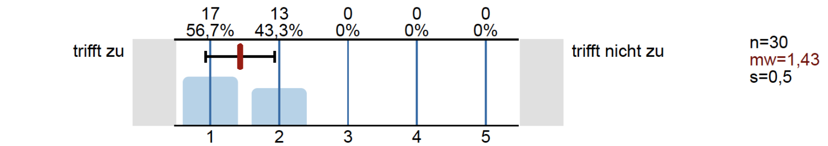
5.3) Ich werde gut zum selbstständigen Lösen von Aufgaben angeleitet.



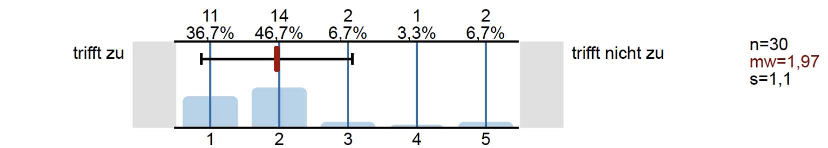
5.4) Die Anwendbarkeit des Übungsstoffes wird z.B. durch Beispiele gut verdeutlicht.



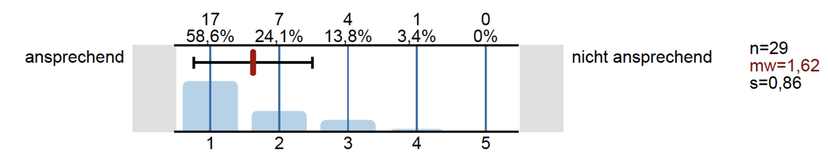
5.5) Die Übungsform (Aufgabenbehandlung, Programmieren, etc.) ist gut zur Vermittlung des Stoffes geeignet.



5.6) Die Präsentation von Aufgaben und Lösungen ist nachvollziehbar, es ist genügend Zeit zum Mitdenken vorhanden.

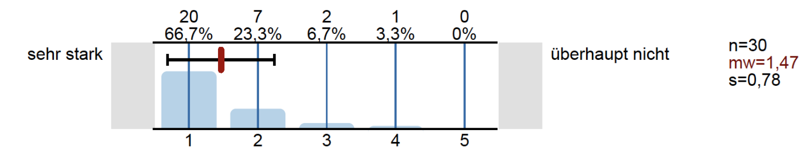


5.7) Der Präsentationsstil der Übungsleiterin/des Übungsleiters ist:

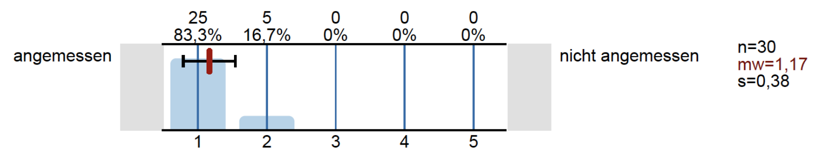


Organisatorisches – Vorlesungsevaluation

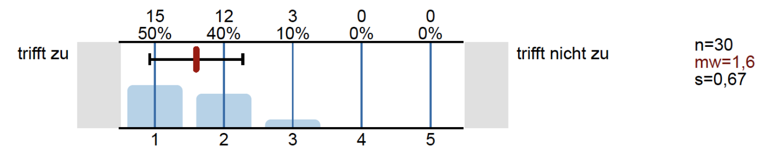
5.8) Die Übungsleiterin/Der Übungsleiter geht auf Fragen und Belange der Studierenden ein.



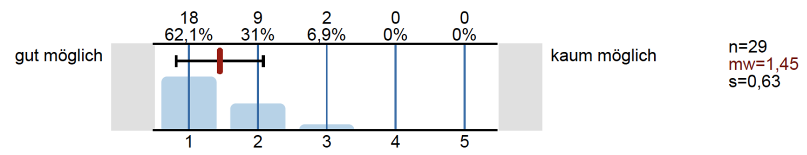
5.9) Der Einsatz und das Zusammenspiel von Medien (Tafel, Overhead-Projektor, Beamer, etc.) ist:



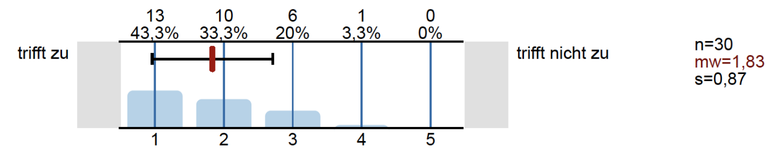
5.10) Die zur Verfügung gestellten Unterlagen sind in Menge und Qualität den Zielen der Übung angemessen.



5.11) Anhand des erarbeiteten Übungsmaterials ist die Vertiefung des Vorlesungs-/Modulinhalts:

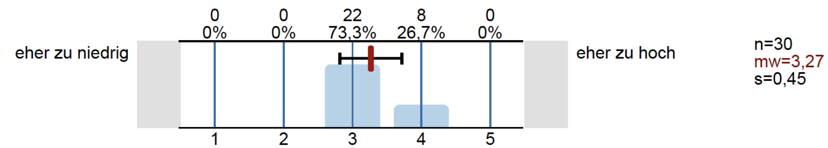


5.12) Der Bezug zu den Prüfungsanforderungen wird hergestellt.

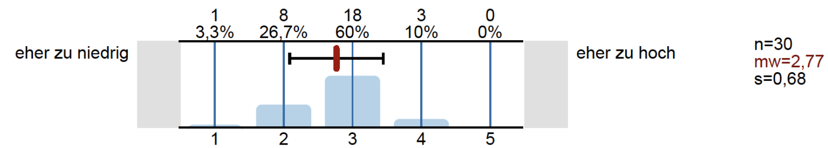


Organisatorisches – Vorlesungsevaluation

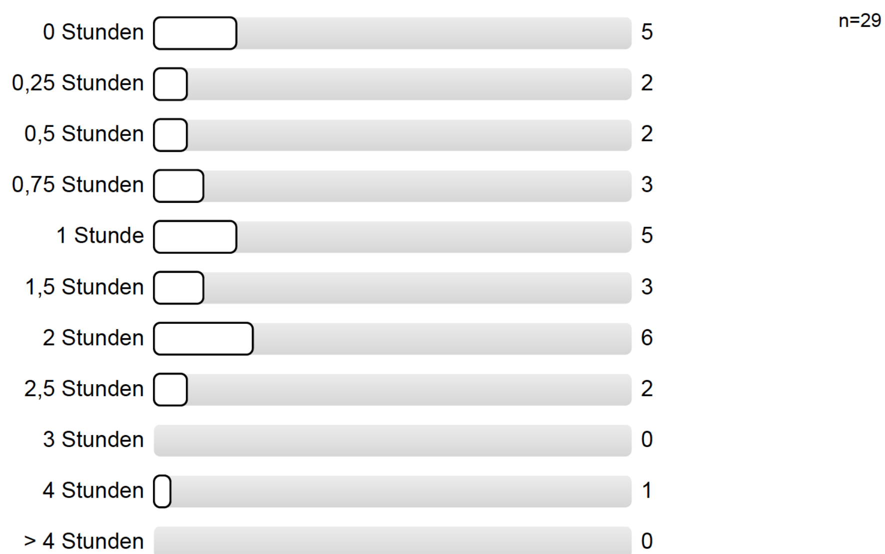
6.1) Der Schwierigkeitsgrad der Übung ist:



6.3) Meinen zeitlichen Durchschnittsaufwand für diese Übung finde ich:



6.2) Mein Durchschnittsaufwand für Vor- und Nachbereitung dieser Übung beträgt pro Woche:



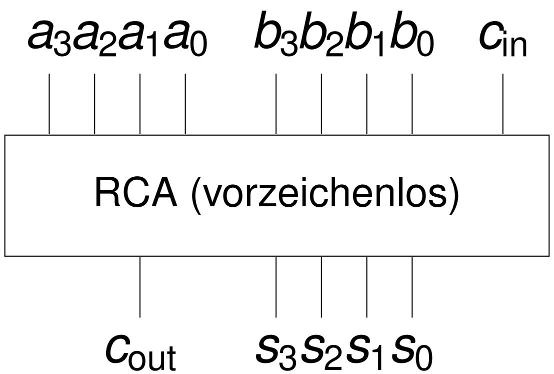
Aufgabe 1 – Addierer/Subtrahierer

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Aufgabe 1 – Addierer/Subtrahierer

a) Realisieren Sie sowohl einen Halbaddierer als auch einen Volladdierer ausschließlich mit NAND-Gattern. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der verwendeten Gatter und die Länge des kritischen Pfades.

b) Erstellen Sie aus den Volladdiererzellen aus a) einen Ripple-Carry-Addierer (RCA) für 4 Bit breite Operanden:



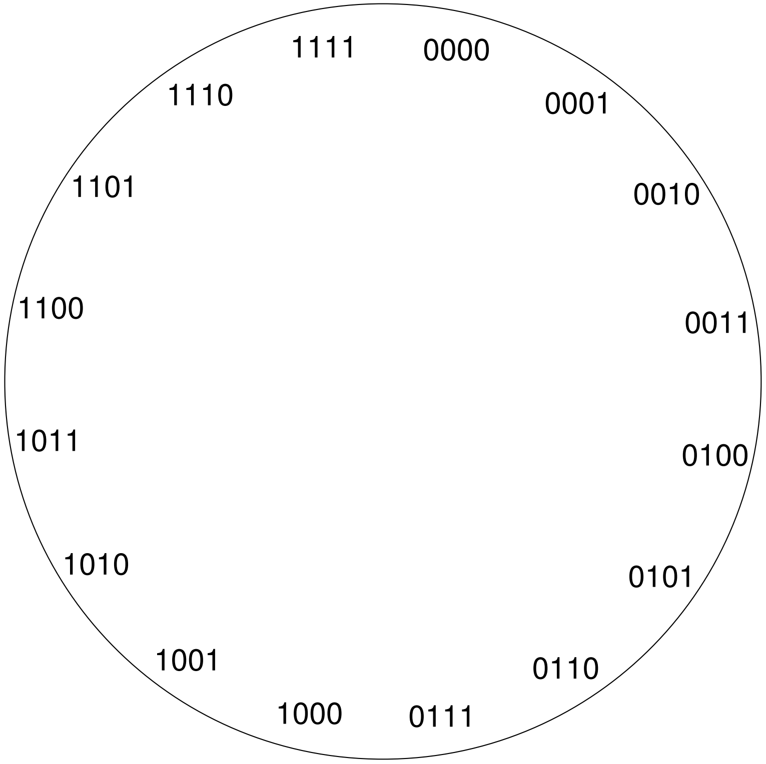
Wieviele Gatter enthält der kritische Pfad des gesamten Schaltnetzes nun?

Aufgabe 1 – Addierer/Subtrahierer

c) Erweitern Sie den RCA aus b) nun um eine Subktraktionsfunktion. Es soll $A - B$ berechnet werden, wenn der zusätzliche Steuereingang *sub* aktiv ist (ist *sub* inaktiv, soll weiterhin $A + B$ berechnet werden). Geben Sie jeweils eine Lösung an, die i) das 1er-Komplement und ii) das 2er-Komplement zur Berechnung nutzt.

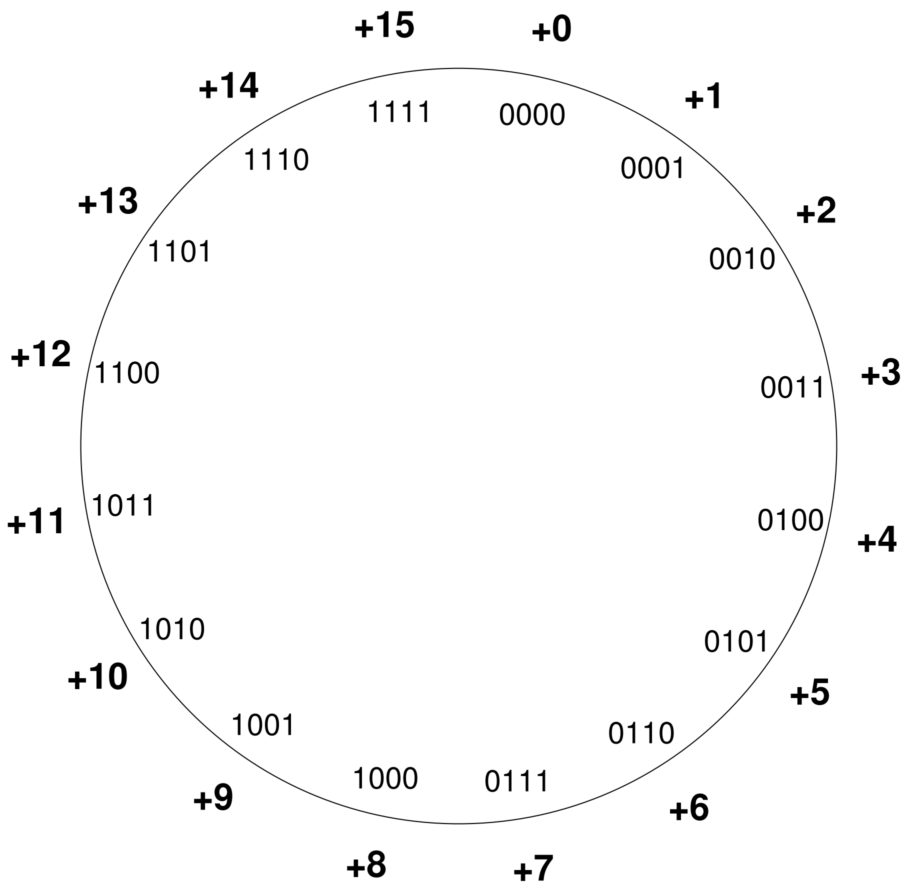
Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

Vorzeichenlose Zahlendarstellung –



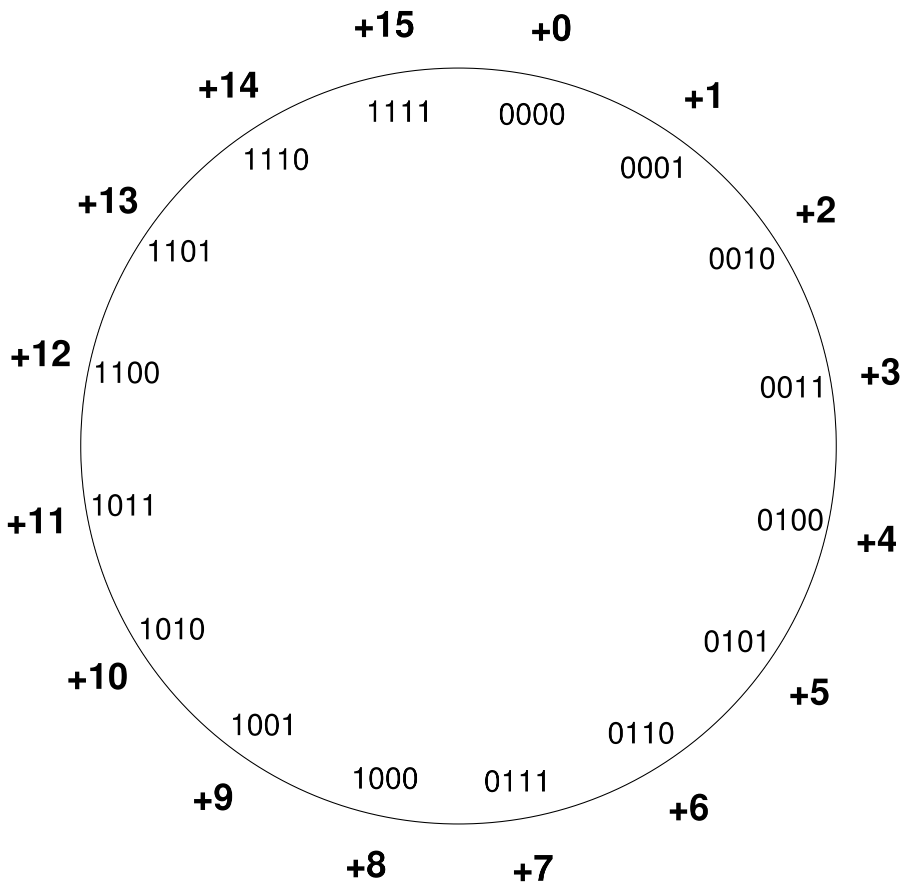
Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

Vorzeichenlose Zahlendarstellung –



Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

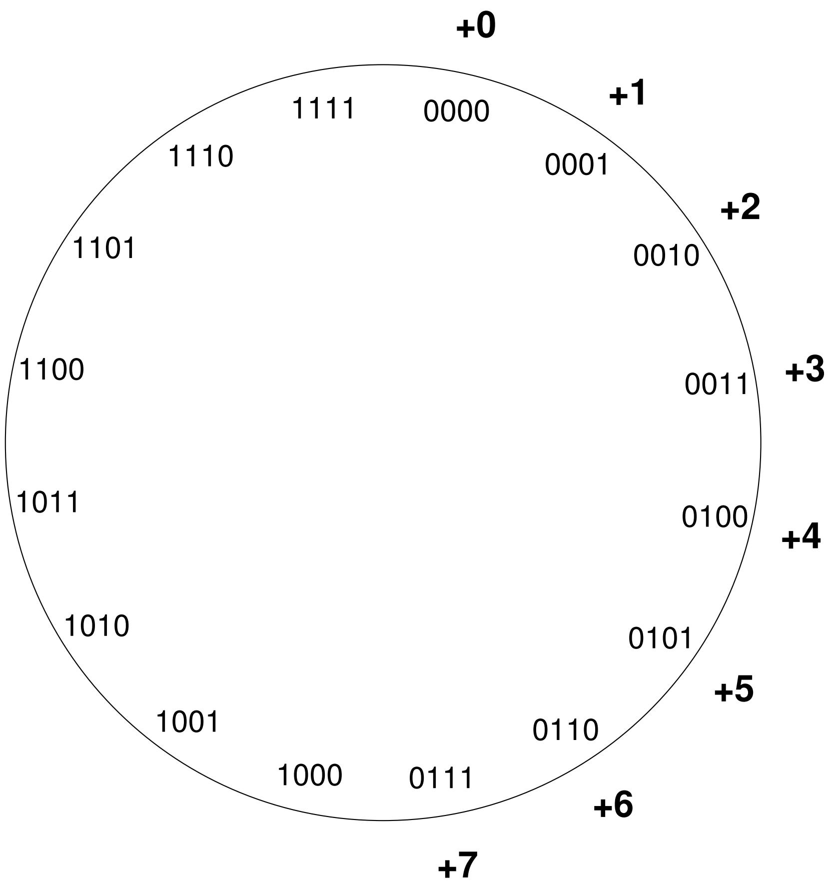
Vorzeichenlose Zahlendarstellung –



Wertebereich einer n bit breiten Zahl: $\left[0, 2^n - 1\right]$

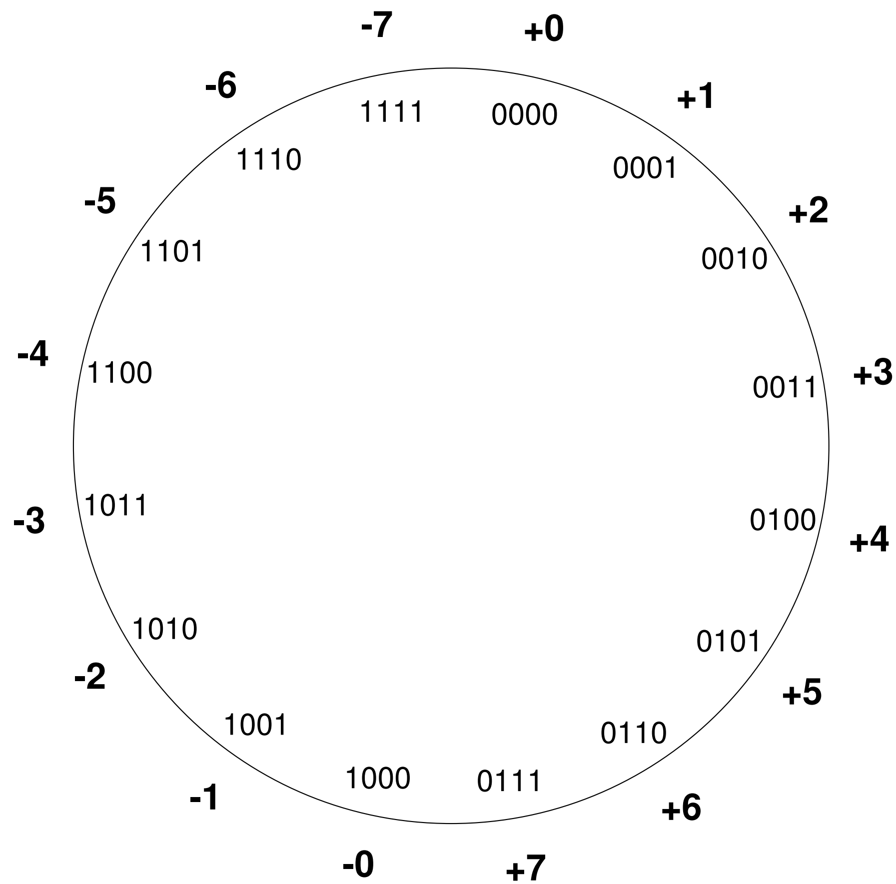
Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

Vorzeichen-/Betragsdarstellung



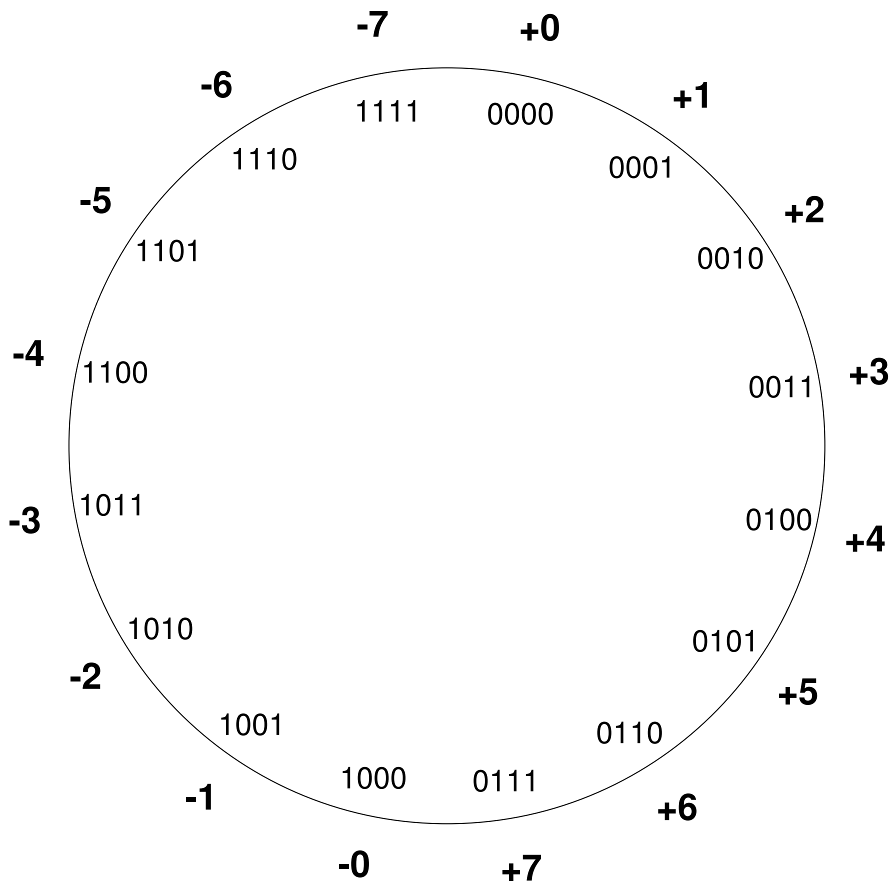
Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

Vorzeichen-/Betragsdarstellung



Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

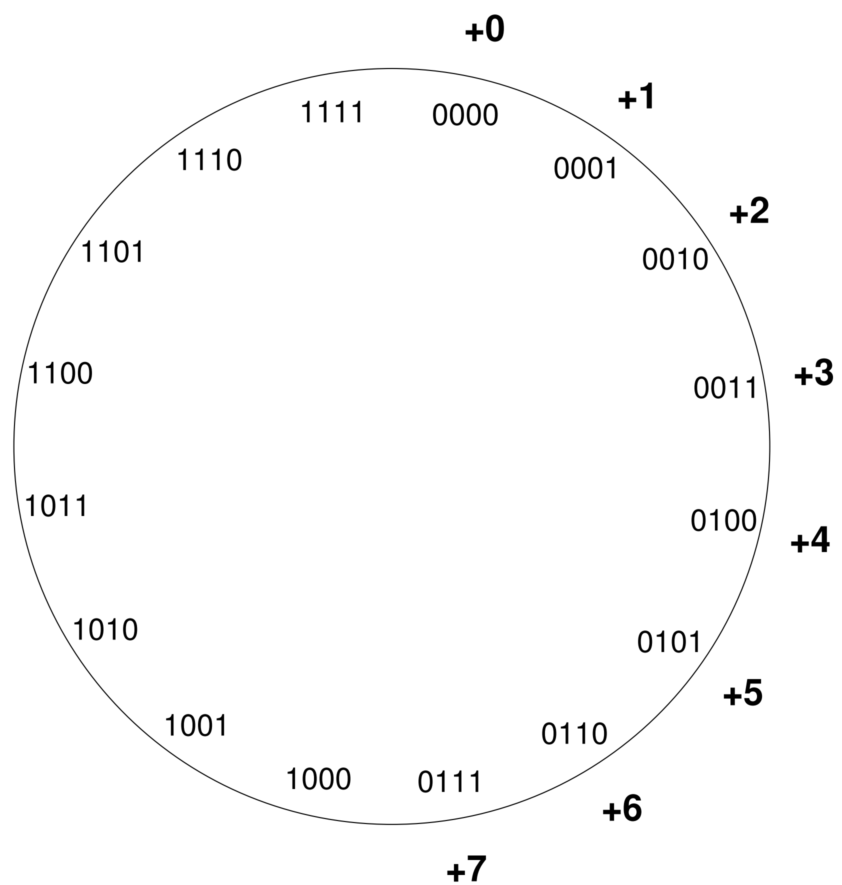
Vorzeichen-/Betragsdarstellung



Wertebereich einer n bit breiten Zahl: $\left[-2^{n-1}+1, 2^{n-1}-1\right]$

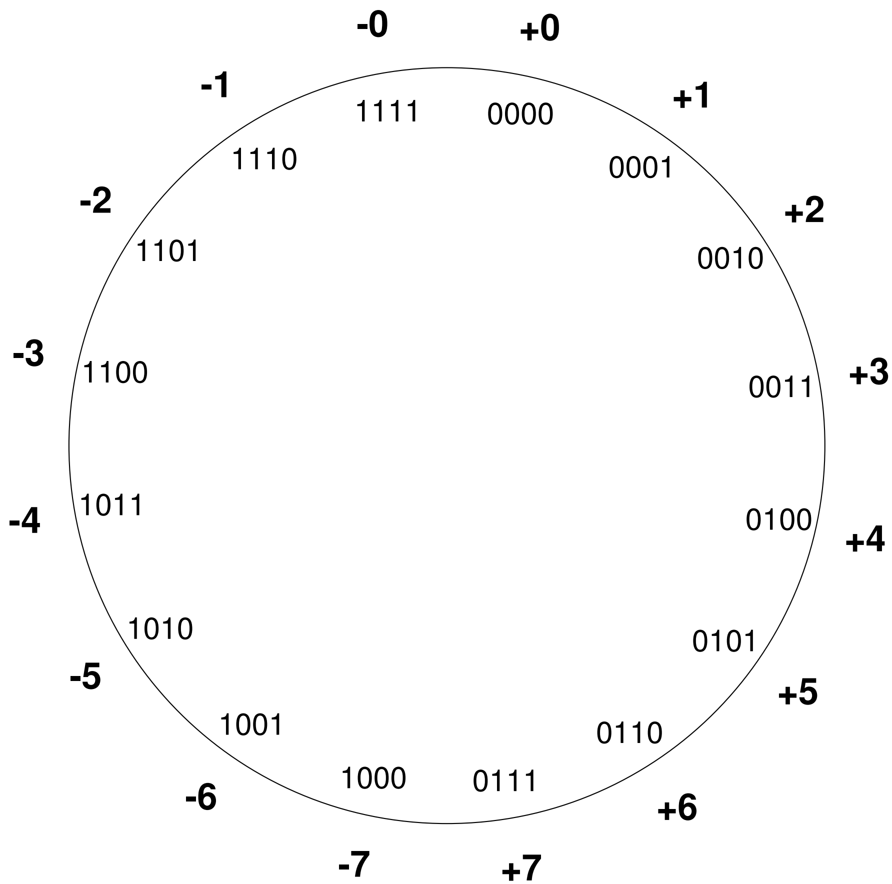
Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

Einerkomplement



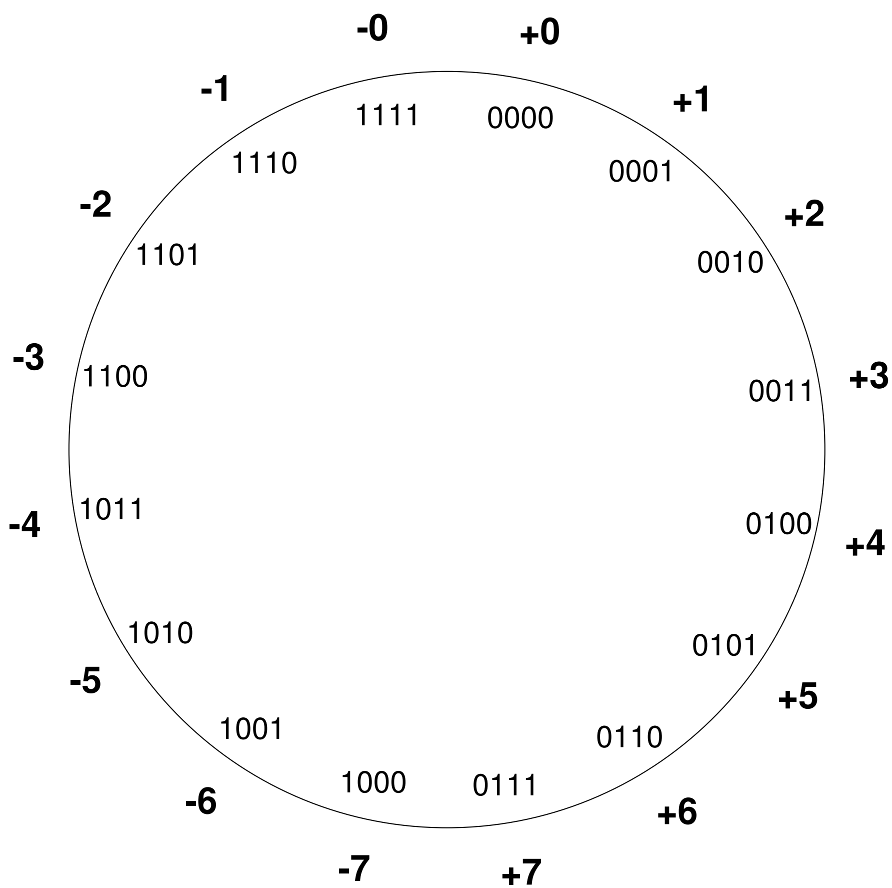
Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

Einerkomplement



Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

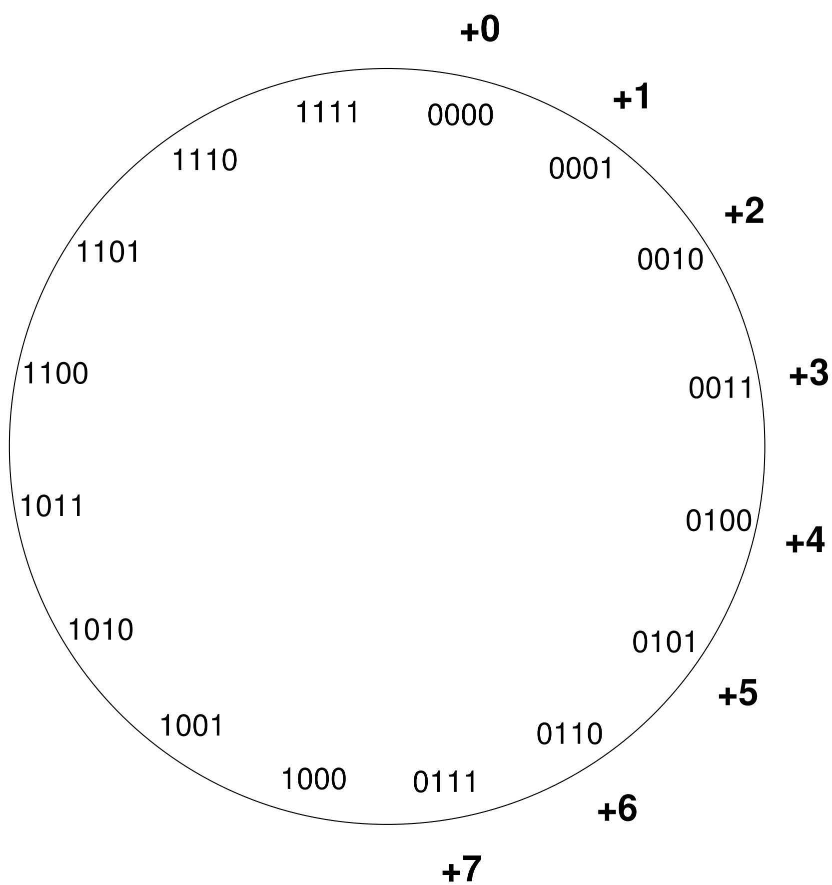
Einerkomplement



Wertebereich einer n bit breiten Zahl: $\left[-2^{n-1}+1, 2^{n-1}-1\right]$

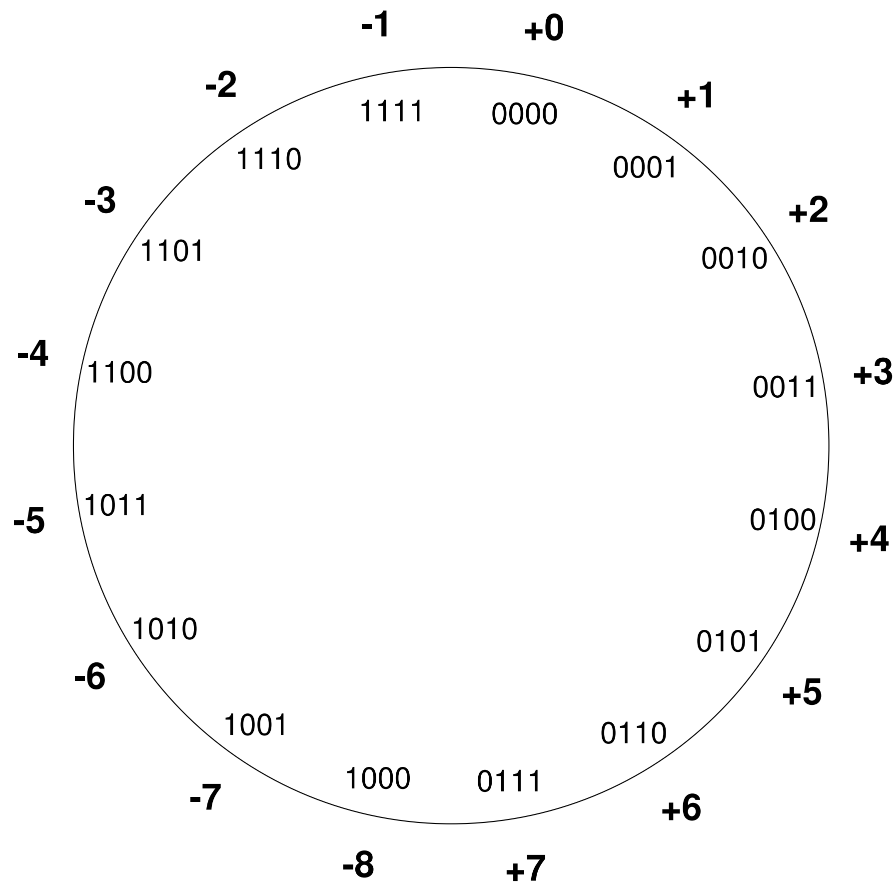
Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

Zweierkomplement



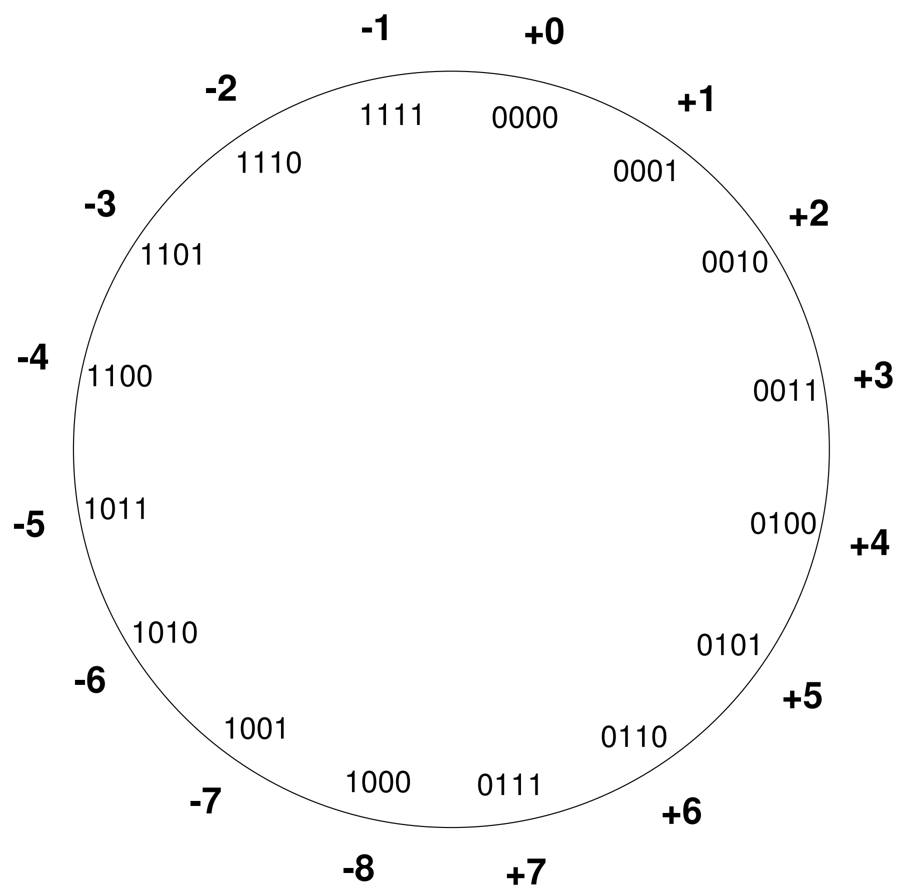
Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

Zweierkomplement



Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

Zweierkomplement



Wertebereich einer n bit breiten Zahl: $\left[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1\right]$

Wiederholung: Blatt 3, Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen: Theorie

1er-Komplement

Im 1er-Komplement erhalten wir die „negative“ Zahl $-a$ einer Zahl a, indem wir **jede einzelne Stelle negieren**.

$$a = (a_n ... a_0) \rightarrow -a = (\overline{a_n} \ ... \ \overline{a_0})$$

2er-Komplement

Im 2er-Komplement erhalten wir die „negative“ Zahl $-a$ einer Zahl a, indem wir **die negative Zahl im 1er-Komplement bilden und** 1 **addieren**.

$$a = (a_n ... a_0) \rightarrow -a = (\overline{a_n} \ ... \ \overline{a_0}) + 1$$

Aufgabe 1 – Addierer/Subtrahierer

c) Erweitern Sie den RCA aus b) nun um eine Subktraktionsfunktion. Es soll $A - B$ berechnet werden, wenn der zusätzliche Steuereingang *sub* aktiv ist (ist *sub* inaktiv, soll weiterhin $A + B$ berechnet werden). Geben Sie jeweils eine Lösung an, die i) das 1er-Komplement und ii) das 2er-Komplement zur Berechnung nutzt.

d) Entwerfen Sie schließlich eine Komponente, die bestimmt, ob ein arithmetischer Überlauf vorliegt, und für beide Varianten aus c) verwendet werden kann.

Aufgabe 2 – Mehr-Operanden-Addierer

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Aufgabe 2 – Mehr-Operanden-Addierer

Entwerfen Sie ein Schaltnetz für die Addition von vier 4 Bit langen Summanden U, V, W und X, das beispielsweise für die Addition von Teilprodukten eines Multiplizierers benutzt werden könnte:

$$U + V + W + X = \begin{array}{ccccccc} & & & u_3 & u_2 & u_1 & u_0 \\ + & & & v_3 & v_2 & v_1 & v_0 \\ + & & & w_3 & w_2 & w_1 & w_0 \\ + & & & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ \hline = & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \end{array}$$

Verwenden Sie drei Ripple-Carry-Addierer, um zuerst $U + V$ und $W + X$ zu berechnen und anschließend die beiden Teilsummen zu addieren. Gehen Sie davon aus, dass nur die Volladdierer aus Aufgabe 2a) verwendet werden und annotieren Sie die Gatterverzögerungen an deren Ausgänge.

Aufgabe 3 – Arithmetik

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Aufgabe 3 – Arithmetik

a) Multiplizieren Sie die beiden Binärzahlen $A = 0100110$ und $B = 0101$ durch Anwendung der Methode, die bei der Implementierung eines sequentiellen Multiplizierers zum Einsatz kommt. Geben Sie die einzelnen Schritte und das Ergebnis explizit an.

b) Dividieren Sie die Binärzahl $A = 0111101$ durch die Binärzahl $B = 0110$ mit dem Non-Restoring-Divisionsverfahren. Geben Sie die einzelnen Schritte sowie den Quotienten Q und Rest R explizit an.

Aufgabe 3 – Arithmetik: Arraymultiplizierer

Generelle Frage: Wie können wir zwei n/m-bit Binärzahlen $a = a_n ... a_0$, $b = b_m ... b_0$, $n, m \geqslant 1$ multiplizieren?

Aufgabe 3 – Arithmetik: Arraymultiplizierer

Generelle Frage: Wie können wir zwei n/m-bit Binärzahlen $a = a_n \ldots a_0$, $b = b_m \ldots b_0$, $n, m \geqslant 1$ multiplizieren?

Erste „naive“ Idee: Ansatz der „schriftlichen Multiplikation“

Aufgabe 3 – Arithmetik: Arraymultiplizierer

Generelle Frage: Wie können wir zwei n/m-bit Binärzahlen $a = a_n ... a_0$, $b = b_m ... b_0$, $n, m \geqslant 1$ multiplizieren?

Erste „naive“ Idee: Ansatz der „schriftlichen Multiplikation“

Um zwei Binärzahlen zu multiplizieren, gehen wir genauso wie bei der schriftlichen Multiplikation vor.

Aufgabe 3 – Arithmetik: Arraymultiplizierer

Generelle Frage: Wie können wir zwei n/m-bit Binärzahlen $a = a_n \ldots a_0$, $b = b_m \ldots b_0$, $n, m \geqslant 1$ multiplizieren?

Erste „naive“ Idee: Ansatz der „schriftlichen Multiplikation“

Um zwei Binärzahlen zu multiplizieren, gehen wir genauso wie bei der schriftlichen Multiplikation vor.

Sei im Beispiel $n = 4$ und $m = 2$:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \times & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
 & & & & & a_4 b_0 & a_3 b_0 & a_2 b_0 & a_1 b_0 & a_0 b_0 \\
 & & & & a_4 b_1 & a_3 b_1 & a_2 b_1 & a_1 b_1 & a_0 b_1 & \\
+ & & & a_4 b_2 & a_3 b_2 & a_2 b_2 & a_1 b_2 & a_0 b_2 & & \\
\hline\hline
 & & p_7 & p_6 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0
\end{array}
$$

Aufgabe 3 – Arithmetik: Arraymultiplizierer

Generelle Frage: Wie können wir zwei n/m-bit Binärzahlen $a = a_n \ldots a_0$, $b = b_m \ldots b_0$, $n, m \geqslant 1$ multiplizieren?

Erste „naive“ Idee: Ansatz der „schriftlichen Multiplikation“

Um zwei Binärzahlen zu multiplizieren, gehen wir genauso wie bei der schriftlichen Multiplikation vor.

Sei im Beispiel $n = 4$ und $m = 2$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \times & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
 & & & & & a_4b_0 & a_3b_0 & a_2b_0 & a_1b_0 & a_0b_0 \\
 & & & & a_4b_1 & a_3b_1 & a_2b_1 & a_1b_1 & a_0b_1 & \\
+ & & & a_4b_2 & a_3b_2 & a_2b_2 & a_1b_2 & a_0b_2 & & \\
\hline\hline
 & & p_7 & p_6 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0
\end{array}
$$

Eine jeder dieser konjunktiven Verknüfungen lässt sich „leicht“ ausrechnen ($\rightsquigarrow$ UND-Gatter)

Aufgabe 3 – Arithmetik: Arraymultiplizierer

Generelle Frage: Wie können wir zwei n/m-bit Binärzahlen $a = a_n \dots a_0$, $b = b_m \dots b_0$, $n, m \geqslant 1$ multiplizieren?

Erste „naive“ Idee: Ansatz der „schriftlichen Multiplikation“

Um zwei Binärzahlen zu multiplizieren, gehen wir genauso wie bei der schriftlichen Multiplikation vor.

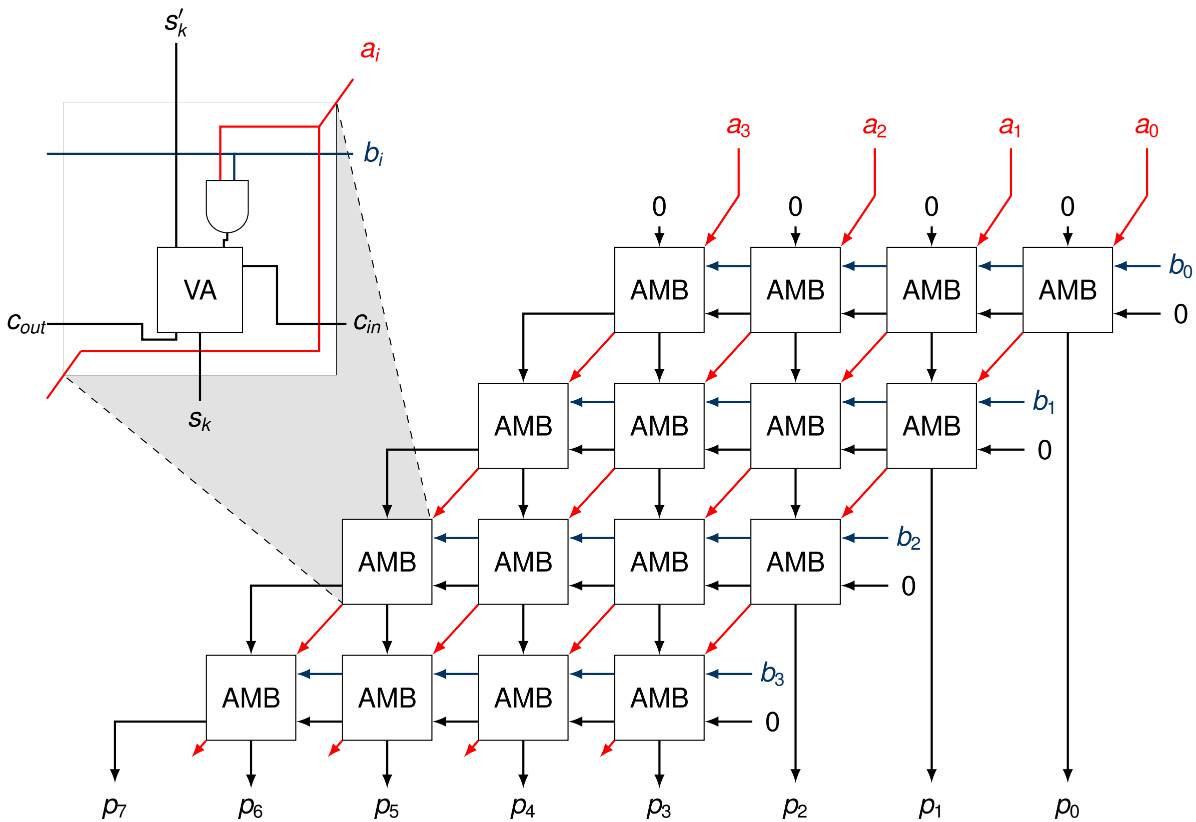
Sei im Beispiel $n = 4$ und $m = 2$:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \times & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
 & & & & & a_4b_0 & a_3b_0 & a_2b_0 & a_1b_0 & a_0b_0 \\
 & & & & a_4b_1 & a_3b_1 & a_2b_1 & a_1b_1 & \boxed{a_0b_1} & \\
+ & & & a_4b_2 & a_3b_2 & a_2b_2 & a_1b_2 & a_0b_2 & & \\
\hline\hline
 & p_7 & p_6 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 &
\end{array}
$$

Eine jeder dieser konjunktiven Verknüfungen lässt sich „leicht“ ausrechnen ($\rightsquigarrow$ UND-Gatter)

Aufgabe 3 – Arithmetik: Arraymultiplizierer

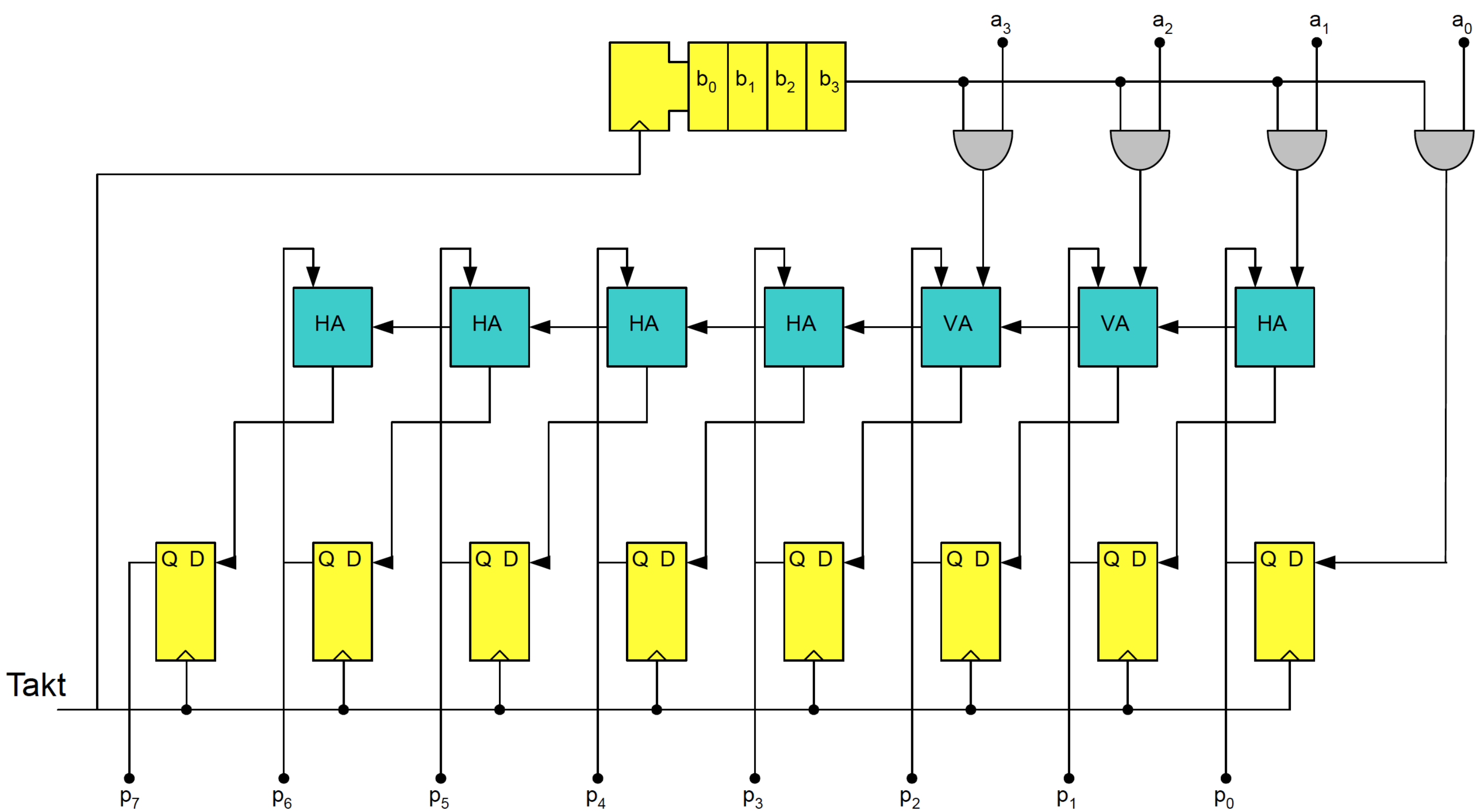
Man nennt einen solchen Multiplizierer, der auf diese Art multipliziert, „Arraymultiplizierer“. Sein Gatterschaltbild sieht wie folgt aus:



Problem: hoher Hardwareaufwand und sehr lange Laufzeit ($(3 \cdot n - 2) \cdot \tau$) mit τ als Latenz eines Gatters

Aufgabe 3 – Arithmetik: Sequentielle Multiplikation

Wir wollen nun den Hardwareaufwand verringern. Mit ein bisschen Überlegung gelangt man zu folgendem Schaltbild:



Aufgabe 3 – Arithmetik

a) Multiplizieren Sie die beiden Binärzahlen $A = 0100110$ und $B = 0101$ durch Anwendung der Methode, die bei der Implementierung eines sequentiellen Multiplizierers zum Einsatz kommt. Geben Sie die einzelnen Schritte und das Ergebnis explizit an.

b) Dividieren Sie die Binärzahl $A = 0111101$ durch die Binärzahl $B = 0110$ mit dem Non-Restoring-Divisionsverfahren. Geben Sie die einzelnen Schritte sowie den Quotienten Q und Rest R explizit an.