

Übungen zur Grundlagen der Technischen Informatik

Übung 8 – Nelson/Petrick, Überdeckungstabellen und Quine/McCluskey

Florian Frank

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Wintersemester 2018/19



Was machen wir heute?

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick-Verfahren

Was machen wir heute?

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick-Verfahren

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Was machen wir heute?

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick-Verfahren

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Aufgabe 3 – Quine/McCluskey-Verfahren

Was machen wir heute?

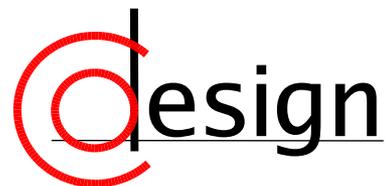
Aufgabe 1 – Nelson/Petrick-Verfahren

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Aufgabe 3 – Quine/McCluskey-Verfahren

Aufgabe 4 – Relation zur Vorweihnachtszeit

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick-Verfahren



Aufgabe 1 – Nelson/Petrick-Verfahren

Sei die folgende Funktionstabelle gegeben:

Dezimal	x_4	x_3	x_2	x_1	y_0	y_1	Dezimal	x_4	x_3	x_2	x_1	y_0	y_1
0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	9	1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	10	1	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	1	1	11	1	0	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	0	12	1	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1	1	13	1	1	0	1	1	0
6	0	1	1	0	1	0	14	1	1	1	0	1	1
7	0	1	1	1	1	1	15	1	1	1	1	1	1

- Ermitteln Sie alle Primimplikanten für die Funktion y_0 mithilfe des Nelson-Verfahrens.
- Bestimmen Sie eine disjunktive Minimalform (DMF) für die Funktion y_1 mittels des Nelson/Petrick-Verfahrens.

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Nelson-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Nelson-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Schritt 1 – Einstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Nelson-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Schritt 1 – Einstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Nullblocküberdeckung

Erstelle eine Nullblocküberdeckung für die Einstellenergänzung und ...

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Nelson-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Schritt 1 – Einstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Nullblocküberdeckung

Erstelle eine Nullblocküberdeckung für die Einstellenergänzung und ...

Schritt 3 – Aufstellen einer konjunktiven Form

... stelle daraus eine KF für die Einstellenergänzung auf.

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Nelson-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Schritt 1 – Einstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Nullblocküberdeckung

Erstelle eine Nullblocküberdeckung für die Einstellenergänzung und ...

Schritt 3 – Aufstellen einer konjunktiven Form

... stelle daraus eine KF für die Einstellenergänzung auf.

Schritt 4 – Mache die KF zur DF

Umwandeln der eben erstellten KF in eine äquivalente DF durch Anwenden von logischen Umformungen

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Nelson-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Schritt 1 – Einstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Nullblocküberdeckung

Erstelle eine Nullblocküberdeckung für die Einstellenergänzung und ...

Schritt 3 – Aufstellen einer konjunktiven Form

... stelle daraus eine KF für die Einstellenergänzung auf.

Schritt 4 – Mache die KF zur DF

Umwandeln der eben erstellten KF in eine äquivalente DF durch Anwenden von logischen Umformungen

Schritt 5 – Streichen aller reinen Redundanzterme

Streiche alle Terme der eben erstellten DF, die nur Freistellen überdecken.

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick-Verfahren

Sei die folgende Funktionstabelle gegeben:

Dezimal	x_4	x_3	x_2	x_1	y_0	y_1	Dezimal	x_4	x_3	x_2	x_1	y_0	y_1
0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	9	1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	10	1	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	1	1	11	1	0	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	0	12	1	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1	1	13	1	1	0	1	1	0
6	0	1	1	0	1	0	14	1	1	1	0	1	1
7	0	1	1	1	1	1	15	1	1	1	1	1	1

a) Ermitteln Sie alle Primimplikanten für die Funktion y_0 mithilfe des Nelson-Verfahrens.

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Petrick-Verfahren (Kostenminimale Auswahl der Primterme)

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Petrick-Verfahren (Kostenminimale Auswahl der Primterme)

Schritt 1 – Bilden des Petrick-Ausdrucks

Konjungiere die in der Überdeckungstabelle spaltenweise disjungen
Implikanten

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Petrick-Verfahren (Kostenminimale Auswahl der Primterme)

Schritt 1 – Bilden des Petrick-Ausdrucks

Konjungiere die in der Überdeckungstabelle spaltenweise disjungenierten Implikanten

Schritt 2 – Vereinfachen des Petrick-Ausdrucks

Wende dazu das Absorptions- und Distributivgesetz auf den Petrick-Ausdruck an.

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Petrick-Verfahren (Kostenminimale Auswahl der Primterme)

Schritt 1 – Bilden des Petrick-Ausdrucks

Konjungiere die in der Überdeckungstabelle spaltenweise disjungenen Implikanten

Schritt 2 – Vereinfachen des Petrick-Ausdrucks

Wende dazu das Absorptions- und Distributivgesetz auf den Petrick-Ausdruck an.

Schritt 3 – Herausfinden der kostenminimalen Lösung(en)

Wähle den/die kostenminimalsten Disjunkt(e) des vereinfachten Petrick-Ausdrucks aus → Minimalform.

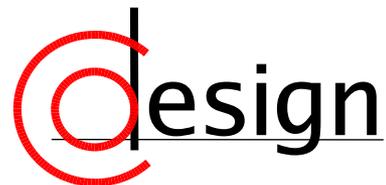
Aufgabe 1 – Nelson/Petrick-Verfahren

Sei die folgende Funktionstabelle gegeben:

Dezimal	x_4	x_3	x_2	x_1	y_0	y_1	Dezimal	x_4	x_3	x_2	x_1	y_0	y_1
0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	9	1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	10	1	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	1	1	11	1	0	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	0	12	1	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1	1	13	1	1	0	1	1	0
6	0	1	1	0	1	0	14	1	1	1	0	1	1
7	0	1	1	1	1	1	15	1	1	1	1	1	1

b) Bestimmen Sie eine disjunktive Minimalform (DMF) für die Funktion y_1 mittels des Nelson/Petrick-Verfahrens.

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle



Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch mittels einer Überdeckungstabelle unter Angabe der verwendeten Regeln. Geben Sie zudem eine DMF der beschriebenen Schaltfunktion $g(e, d, c, b, a)$ an.

Primimplikant	2	8	10	11	26	29	31	Kosten c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	×		×	×				5
$\bar{e}ba$				×				5
$d\bar{c}b$			×	×	×			5
dba							×	5
dca						×	×	5
$\bar{c}\bar{a}$	×	×	×		×			2
$\bar{e}d$		×	×	×				2

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Überdeckungstabellen (Graphisches Äquivalent zum Petrick-Verfahren)

Grundsatzidee: Minimierung des logischen Ausdrucks durch optimale Selektion der Primterme, die zu einer vollständigen Überdeckung aller Einstellen führt.

Dazu geht man folgende Schritte:

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Überdeckungstabellen (Graphisches Äquivalent zum Petrick-Verfahren)

Grundsatzidee: Minimierung des logischen Ausdrucks durch optimale Selektion der Primterme, die zu einer vollständigen Überdeckung aller Einstellen führt.

Dazu geht man folgende Schritte:

Schritt 1 – Regel der Kernimplikanten

Finde Kerne (einziges Kreuz in einer Spalte) und streiche die Spalte und Schnittspalten.

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Überdeckungstabellen (Graphisches Äquivalent zum Petrick-Verfahren)

Grundsatzidee: Minimierung des logischen Ausdrucks durch optimale Selektion der Primterme, die zu einer vollständigen Überdeckung aller Einstellen führt.

Dazu geht man folgende Schritte:

Schritt 1 – Regel der Kernimplikanten

Finde Kerne (einziges Kreuz in einer Spalte) und streiche die Spalte und Schnittspalten.

Schritt 2 – Regel der Spaltendominanz

Streiche dominierende Spalten (eine Obermenge einer anderen Spalte).

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Überdeckungstabellen (Graphisches Äquivalent zum Petrick-Verfahren)

Grundsatzidee: Minimierung des logischen Ausdrucks durch optimale Selektion der Primterme, die zu einer vollständigen Überdeckung aller Einstellen führt.

Dazu geht man folgende Schritte:

Schritt 1 – Regel der Kernimplikanten

Finde Kerne (einziges Kreuz in einer Spalte) und streiche die Spalte und Schnittspalten.

Schritt 2 – Regel der Spaltendominanz

Streiche dominierende Spalten (eine Obermenge einer anderen Spalte).

Schritt 3 – Regel der Zeilendominanz

Streiche dominierte Zeilen **nur** wenn sie mehr kostet als ihre dominierende Zeile oder keine Zeile(-nkombination) existiert, welche die fehlenden Einstellen überdeckt und weniger kostet als die Differenz.

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Überdeckungstabellen (Graphisches Äquivalent zum Petrick-Verfahren)

Grundsatzidee: Minimierung des logischen Ausdrucks durch optimale Selektion der Primterme, die zu einer vollständigen Überdeckung aller Einsstellen führt.

Dazu geht man folgende Schritte:

Schritt 1 – Regel der Kernimplikanten

Finde Kerne (einziges Kreuz in einer Spalte) und streiche die Spalte und Schnittspalten.

Schritt 2 – Regel der Spaltendominanz

Streiche dominierende Spalten (eine Obermenge einer anderen Spalte).

Schritt 3 – Regel der Zeilendominanz

Streiche dominierte Zeilen **nur** wenn sie mehr kostet als ihre dominierende Zeile oder keine Zeile(-nkombination) existiert, welche die fehlenden Einsstellen überdeckt und weniger kostet als die Differenz.

Schritt 4 – Wiederhole Schritte 1 bis 3 solange bis kein Schritt mehr anwendbar ist

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Überdeckungstabellen (Graphisches Äquivalent zum Petrick-Verfahren)

Grundsatzidee: Minimierung des logischen Ausdrucks durch optimale Selektion der Primterme, die zu einer vollständigen Überdeckung aller Einstellen führt.

Dazu geht man folgende Schritte:

Schritt 1 – Regel der Kernimplikanten

Finde Kerne (einziges Kreuz in einer Spalte) und streiche die Spalte und Schnittspalten.

Schritt 2 – Regel der Spaltendominanz

Streiche dominierende Spalten (eine Obermenge einer anderen Spalte).

Schritt 3 – Regel der Zeilendominanz

Streiche dominierte Zeilen **nur** wenn sie mehr kostet als ihre dominierende Zeile oder keine Zeile(-nkombination) existiert, welche die fehlenden Einstellen überdeckt und weniger kostet als die Differenz.

Schritt 4 – Wiederhole Schritte 1 bis 3 solange bis kein Schritt mehr anwendbar ist

Problem: Es kann zu zyklischen Resttabellen kommen (→ wende dann das Petrick-Verfahren an.)

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch mittels einer Überdeckungstabelle unter Angabe der verwendeten Regeln. Geben Sie zudem eine DMF der beschriebenen Schaltfunktion $g(e, d, c, b, a)$ an.

Primimplikant	2	8	10	11	26	29	31	Kosten c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	×		×	×				5
$\bar{e}ba$				×				5
$d\bar{c}b$			×	×	×			5
dba							×	5
dca						×	×	5
$\bar{c}\bar{a}$	×	×	×		×			2
$\bar{e}d$		×	×	×				2

Aufgabe 3 – Quine/McCluskey-Verfahren



Aufgabe 3 – Quine/McCluskey-Verfahren

Auf einer Siebensegmentanzeige soll die einstellige Hexadezimaldarstellung des Bitvektors *DCBA* angezeigt werden. Die folgende Funktionstabelle gibt die Ansteuerfunktionen für die Leuchtbalken *a* bis *g* an (vergleiche Abbildung 2). Optimieren Sie mithilfe des Verfahrens von Quine und McCluskey die Schaltfunktion für den Leuchtbalken *a*.



Abbildung 2: Darstellung von Hexadezimalzahlen auf einer Sieben-Segment-Anzeige.

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Quine/McCluskey-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Quine/McCluskey-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Einstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Quine/McCluskey-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Einstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Bilden einer disjunktiven Normalform

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Quine/McCluskey-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Einstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Bilden einer disjunktiven Normalform

Schritt 3 – Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$

$Q_{i,j}$ bezeichne dabei die Klasse der Implikanten mit i Literalen, von denen j negiert vorkommen (also gilt logischerweise $0 \leq j \leq i$)

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Quine/McCluskey-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Einsstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Bilden einer disjunktiven Normalform

Schritt 3 – Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$

$Q_{i,j}$ bezeichne dabei die Klasse der Implikanten mit i Literalen, von denen j negiert vorkommen (also gilt logischerweise $0 \leq j \leq i$)

Schritt 4 – Reduktion zweier „benachbarter“ Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$

Wende dazu das Distributivgesetz i.V.m. den Komplementärgesetzen an. Fasse die entstehenden Terme wieder in einer neuen Klasse $Q_{i-1,j-1}$ zusammen. Markiere bereits berücksichtigte Terme.

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Quine/McCluskey-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Einsstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Bilden einer disjunktiven Normalform

Schritt 3 – Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$

$Q_{i,j}$ bezeichne dabei die Klasse der Implikanten mit i Literalen, von denen j negiert vorkommen (also gilt logischerweise $0 \leq j \leq i$)

Schritt 4 – Reduktion zweier „benachbarter“ Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$

Wende dazu das Distributivgesetz i.V.m. den Komplementärgesetzen an.

Fasse die entstehenden Terme wieder in einer neuen Klasse $Q_{i-1,j-1}$ zusammen. Markiere bereits berücksichtigte Terme.

Schritt 5 – Wiederhole Schritt 4 solange bis keine Reduktion mehr möglich ist

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Quine/McCluskey-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Einsstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Bilden einer disjunktiven Normalform

Schritt 3 – Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$

$Q_{i,j}$ bezeichne dabei die Klasse der Implikanten mit i Literalen, von denen j negiert vorkommen (also gilt logischerweise $0 \leq j \leq i$)

Schritt 4 – Reduktion zweier „benachbarter“ Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$

Wende dazu das Distributivgesetz i.V.m. den Komplementärgesetzen an.

Fasse die entstehenden Terme wieder in einer neuen Klasse $Q_{i-1,j-1}$ zusammen. Markiere bereits berücksichtigte Terme.

Schritt 5 – Wiederhole Schritt 4 solange bis keine Reduktion mehr möglich ist

Schritt 6 – „Streiche“ all diejenigen Terme, die nur Redundanzstellen überdecken

Die restlichen Terme sind die gesuchten Primimplikanten.

Minimierung von Schaltfunktionen – Verschiedene Verfahren im Überblick

Quine/McCluskey-Verfahren (Bestimmung von Primimplikanten)

Einsstellenergänzung

Verfüge **alle** Redundanzstellen (Freistellen) zu Einstellen

Schritt 2 – Bilden einer disjunktiven Normalform

Schritt 3 – Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$

$Q_{i,j}$ bezeichne dabei die Klasse der Implikanten mit i Literalen, von denen j negiert vorkommen (also gilt logischerweise $0 \leq j \leq i$)

Schritt 4 – Reduktion zweier „benachbarter“ Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$

Wende dazu das Distributivgesetz i.V.m. den Komplementärgesetzen an. Fasse die entstehenden Terme wieder in einer neuen Klasse $Q_{i-1,j-1}$ zusammen. Markiere bereits berücksichtigte Terme.

Schritt 5 – Wiederhole Schritt 4 solange bis keine Reduktion mehr möglich ist

Schritt 6 – „Streiche“ all diejenigen Terme, die nur Redundanzstellen überdecken
Die restlichen Terme sind die gesuchten Primimplikanten.

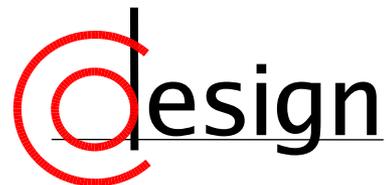
Suche die kostenminimalste Überdeckung weiterhin mit dem Petrick-Verfahren oder einer Überdeckungstabelle.

Aufgabe 3 – Quine/McCluskey-Verfahren

Auf einer Siebensegmentanzeige soll die einstellige Hexadezimaldarstellung des Bitvektors $DCBA$ angezeigt werden. Die folgende Funktionstabelle gibt die Ansteuerfunktionen für die Leuchtbalken a bis g an (vergleiche Abbildung 2). Optimieren Sie mithilfe des Verfahrens von Quine und McCluskey die Schaltfunktion für den Leuchtbalken a .

Hex	$DCBA$	a	b	c	d	e	f	g	Hex	$DCBA$	a	b	c	d	e	f	g
0	0 0 0 0	1	1	1	1	1	1	0	8	1 0 0 0	1	1	1	1	1	1	1
1	0 0 0 1	0	1	1	0	0	0	0	9	1 0 0 1	1	1	1	1	0	1	1
2	0 0 1 0	1	1	0	1	1	0	1	A	1 0 1 0	1	1	1	0	1	1	1
3	0 0 1 1	1	1	1	1	0	0	1	b	1 0 1 1	0	0	1	1	1	1	1
4	0 1 0 0	0	1	1	0	0	1	1	c	1 1 0 0	0	0	0	1	1	0	1
5	0 1 0 1	1	0	1	1	0	1	1	d	1 1 0 1	0	1	1	1	1	0	1
6	0 1 1 0	1	0	1	1	1	1	1	E	1 1 1 0	1	0	0	1	1	1	1
7	0 1 1 1	1	1	1	0	0	0	0	F	1 1 1 1	1	0	0	0	1	1	1

Aufgabe 4 – Relation zur Vorweihnachtszeit



Aufgabe 4 – Relation zur Vorweihnachtszeit

In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage, was besser ist: *ewiges Glück* oder ein **Lebkuchenherz**?

Man sollte meinen, dass nichts besser ist als *ewiges Glück*. Andererseits ist ein **Lebkuchenherz** sicherlich besser als nichts.

„Besser“ ist bekanntlich eine transitive Relation. Was folgt daraus?