AlgoKS Notizen – Bézierkurven und Interpolation

Globale Interpolation

$\mathbb{P}_n := \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Polynom} \mid \text{grad } p \leq n \}$

4 Werte

A1) (a) Globale Interpolation durch

Lagrange und Newton:

i	1	2	3	4
Stützstellen x_i	$x_1 = -2$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 4$
Stützwerte y_i	$y_1 = 4$	$y_2 = -2$	$y_3 = 1$	$y_4 = 4$

Lagrangebasispolynome:

$$L_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Newtonbasispolynome:

$$N_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) = N_{i-1}(x) \cdot (x - x_{i-1})$$

Bestimme die Basispolynome für Lagrange und Newton:

Lagrange: $\{-2, 0, 1, 4\}$

$$L_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \overbrace{\left((\overset{-2}{\cancel{x_1}} - \overset{0}{\cancel{x_2}})(\overset{-2}{\cancel{x_1}} - \overset{1}{\cancel{x_3}})(\overset{-2}{\cancel{x_1}} - \overset{4}{\cancel{x_4}}) \right)^{-1}}^{= (-2 \cdot (-3) \cdot -6)^{-1} = -1/36} (x)(x-1)(x-4)$$

$$L_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{8} (x+2)(x-1)(x-4)$$

$$L_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\tfrac{1}{9} (x+2)(x)(x-4)$$

$$L_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{72} (x+2)(x)(x-1)$$

Newton: $\{-2, 0, 1, 4\}$

$$N_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$$

Das gilt IMMER!

$$N_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto N_1(x) \cdot (x - x_1) = 1 \cdot (x+2)$$

$$N_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+2)(x)$$

$$N_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+2)(x)(x-1)$$

$$L_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{4} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right) \cdot \left(\frac{x-x_3}{x_1-x_3}\right) \cdot \left(\frac{x-x_4}{x_1-x_4}\right)$$

$$= \frac{x}{-2} \cdot \frac{x-1}{-3} \cdot \frac{x-4}{-6}$$

$$= -\tfrac{1}{36} (x)(x-1)(x-4)$$

```
erg = 1;   // Summe wäre es 0
for(j = 1 ; j<4 ; j++) {
    if (¬(j≠1)) { continue; }
    erg *= (x - x_j) / (x_1 - x_j) ;
}
```

(b) Bestimme die tatsächlichen Interpolationspolynome:

i	1	2	3	4
Stützstellen x_i	$x_1 = -2$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 4$
Stützwerte y_i	$y_1 = 4$	$y_2 = -2$	$y_3 = 1$	$y_4 = 4$

LAGRANGE: Koeffizienten sind genau die Stützwerte $\{4,-2,1,4\}$

$$\rightsquigarrow P_L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot L_i(x) = 4 \cdot L_1(x) - 2 \cdot L_2(x) + 1 \cdot L_3(x) + 4 \cdot L_4(x)$$

NEWTON: Stützstellen berechnen sich über Aitken-Neville:

Wichtigste Formel dafür:

$$P_{i,k} = \frac{P_{i+1,k-1} - P_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}$$

„unten-oben"

	x_i	y_i ($N_1(x)$)	$P_{i,1}$ ($N_2(x)$)	$P_{i,2}$ ($N_3(x)$)	$P_{i,3}$ ($N_4(x)$)
$i=1$	-2	4	$P_{1,1} = \frac{P_{2,0} - P_{1,0}}{x_2 - x_1} = \frac{-2-4}{0-(-2)} = -3$	$P_{1,2} = \frac{3-(-3)}{1-(-2)} = 2$	$P_{1,3} = \frac{-1/2 - 2}{4-(-2)} = -5/12$
$i=2$	0	-2	$P_{2,1} = \frac{1-(-2)}{1-0} = 3$	$P_{2,2} = \frac{1-3}{4-0} = -1/2$	
$i=3$	1	1	$P_{3,1} = 1 = \frac{4-1}{4-1}$		
$i=4$	4	4			

$P_{i,0}$ $\qquad$ $P_{i,1}$ $\qquad$ $P_{i,2}$ $\qquad$ $P_{i,3}$

$$\longrightarrow P_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4 \cdot N_1(x) - 3 \cdot N_2(x) + 2 \cdot N_3(x) - \frac{5}{12} \cdot N_4(x)$$

(c) Wir bestimmen die Werte $p_L(0)$ und $p_N(0)$:

i	1	2	3	4
Stützstellen x_i	$x_1 = -2$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 4$
Stützwerte y_i	$y_1 = 4$	$y_2 = -2$	$y_3 = 1$	$y_4 = 4$

$$\left.\begin{aligned} p_L(0) &= -2 \\ p_N(0) &= -2 \end{aligned}\right\} \text{ wg. Interpolation !}$$

Darüberhinaus gilt, falls die Stützstellen paarweise verschieden sind, dass

$$p_L(x) = p_N(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \,!$$

LOKALE INTERPOLATION

(d)

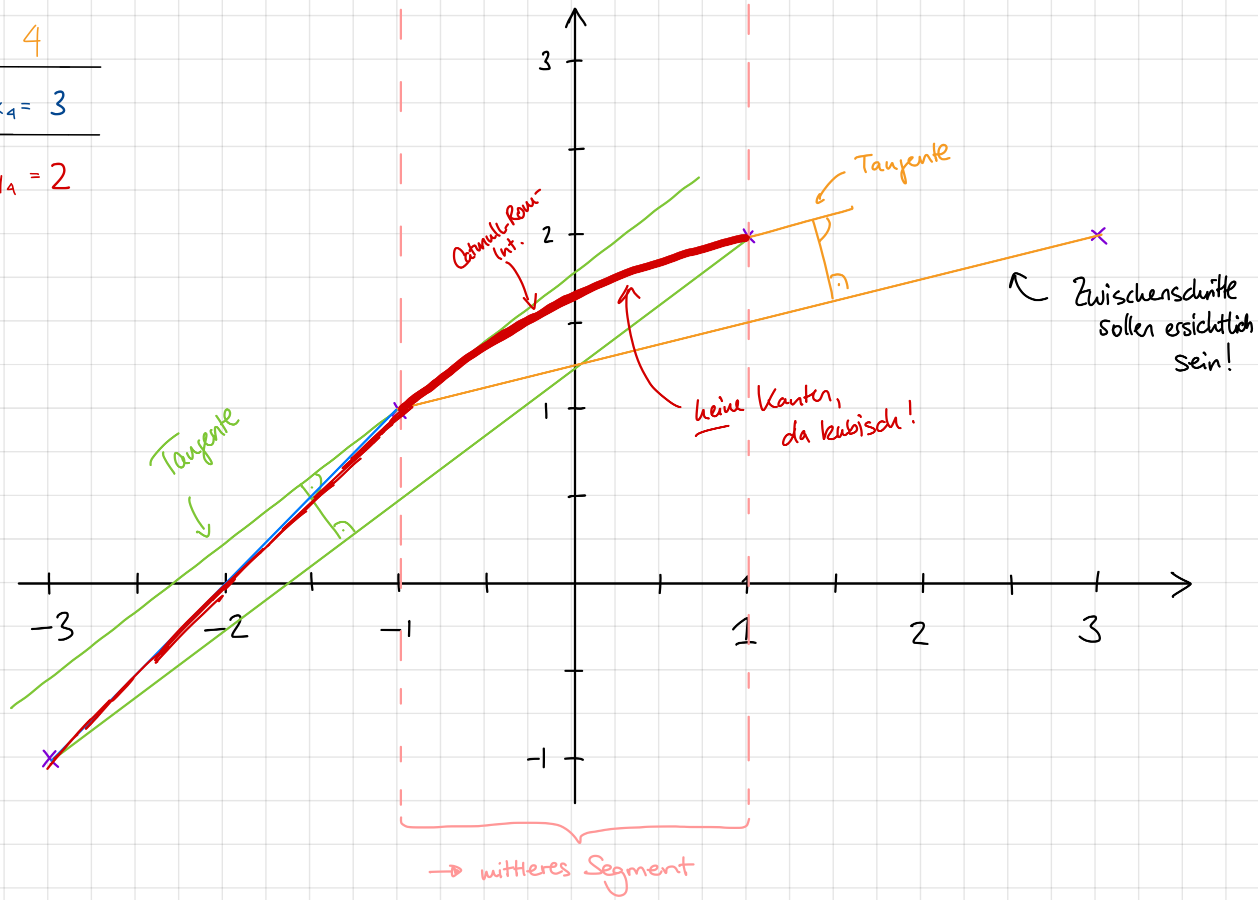
i	1	2	3	4
Stützstellen x_i	$x_1 = -3$	$x_2 = -1$	$x_3 = 1$	$x_4 = 3$
Stützwerte y_i	$y_1 = -1$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 2$

Ableitungen (Tangentensteigungen) werden über die

ZENTRALEN DIFFERENZEN

bestimmt.

$$y_2' = \frac{3}{4} \qquad y_3' = \frac{1}{4}$$



Rechnerisch:

$$a_0 = 1 \qquad a_2 = 5\,^3/_4$$

$$a_1 = 3\,^3/_4 \qquad a_3 = 2$$

$$\Rightarrow P_{CR}: [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (2-x)^3 + 3\,^3/_4\,(2-x)^2(x-1) + 5\,^3/_4\,(2-x)(x-1)^2 + 2(x-1)^3$$