

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Naturwissenschaftliche Fakultät
Department Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik 1

Skript der Veranstaltung

Mathematik für Ingenieure C3 (IngMatC3)

gehalten im Wintersemester 2017/18
von Dr. Ilja Kröker



FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG

NATURWISSENSCHAFTLICHE
FAKULTÄT

1.7 Fixpunktiterationen

Nach den Optimierungsproblemen der letzten Kapitel soll es jetzt um Gleichungen der Form

$$f(x) = x$$

mit einer beliebigen Abbildung $f \in \text{Abb}(M, M)$, wobei $M \neq \emptyset$ gehen. Wir wollen erkennen, wann solche Gleichungen eindeutig bestimmbare Lösungen besitzen und unsere Ergebnisse auf das Nullstellenproblem übertragen. Wir werden dazu das aus dem zweiten Semester bekannte NEWTON-Verfahren anders herleiten und interpretieren, sowie zum Abschluss des Kapitels der Analysis zwei numerische Verfahren kennenlernen, mit denen wir lineare Gleichungssysteme schneller und effizienter lösen können. Wir wollen uns in diesem Zusammenhang ebenso mit den Konvergenzeigenschaften dieser Verfahren näher befassen. Fangen wir zuerst aber mit den grundlegenden Definitionen an.

1.7.1 Grundlegendes und der Fixpunktsatz von Banach

Definition 1.24 (Norm — Wiederholung aus C1)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| \in \text{Abb}(V, \mathbb{K})$ heie **Norm** genau dann, wenn für alle $v, u \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\ v\ \geq 0$ | 3. $\ \lambda v\ = \lambda \ v\ $ |
| 2. $\ v\ = 0 \Leftrightarrow v = 0$ | 4. $\ v + u\ \leq \ v\ + \ u\ $ |

Definition 1.25 (Fixpunkt)

Sei $M \neq \emptyset$ und $\Phi \in \text{Abb}(M, M)$ eine Abbildung. Ein $x \in M$, das den Zusammenhang

$$\Phi(x) = x \tag{1.13}$$

erfülle heie **Fixpunkt** von Φ .

Wir betrachten also eine Abbildung $\Phi : M \rightarrow M$. Sei $M \subseteq V$, wobei V ein normierter Vektorraum ist. Wir betrachten für einen Startwert $x_0 \in M$ eine rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := \Phi(x_n), \tag{*}$$

und stellen uns die Frage, was der Grenzwert der Folge sei. Aussage darüber verschafft der folgende Satz:

Satz 1.20 (Fixpunkt)

Falls die oben definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x_*$ und Φ stetig sei, so ist der Grenzwert x_* **immer ein Fixpunkt** von Φ .

$$\Phi(x_*) = x_*$$

Beweis: Zu zeigen ist hier die Fixpunkteigenschaft des Grenzwertes. Aufgrund der Stetigkeit, existiert nach dem Epsilon-Delta-Kriterium ein ε und ein δ , so dass, für ein $x \in V$ mit $\|x - x_*\| < \delta$ gilt

$$\|\Phi(x_*) - \Phi(x)\| < \varepsilon.$$

Wegen der Konvergenz von der Folge gilt dann, dass ebenso ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren muss, so dass für alle n , die echt größer als n_0 sind gilt, dass $\|\Phi(x_*) - \Phi(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|x_{n-1} - x_*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Damit gilt dann:

$$\|\Phi(x_*) - x_*\| = \|\Phi(x_*) - x_{n+1} + x_{n+1} - x_*\| \leq \|\Phi(x_*) - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_*\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ist die Folge nun konvergent, so folgt $\|\Phi(x_*) - x_*\| = 0$, was nach dem vierten Normaxiom nur bedeuten kann, dass $\Phi(x_*) - x_* = 0$, woraus die Behauptung direkt abzulesen ist. \square

Definition 1.26 (Fixpunktiteration)

Sei $\Phi \in \text{Abb}(M, M)$ mit $M \subseteq V$, wobei V ein normierter Vektorraum ist und $x_0 \in M$. Die Berechnung

$$x_{n+1} := \Phi(x_n) \quad (*)$$

heißt **Fixpunktiteration**.

Die Fixpunktiteration hat ihren Namen daher, dass wenn Φ stetig ist und die Fixpunktiteration konvergiert, so der Grenzwert immer ein Fixpunkt von Φ ist. Wir wollen uns jetzt mit der Frage beschäftigen, wann Fixpunktiterationen überhaupt konvergieren. Ein wichtiges Kriterium dafür ist der Banach'sche Fixpunktsatz, auf den dieses Kapitel hinzielen möchte. Eine Voraussetzung dafür sind sogenannte Banachräume. Diese sollten aus C1 bekannt sein, wir wiederholen sie an dieser Stelle aber noch einmal.

Definition 1.27 (Vollständigkeit, Banachraum)

Ein normierter \mathbb{K} -VR $(V, \|\cdot\|)$ heißt **vollständig** genau dann, wenn jede Cauchyfolge in V gegen ein Element in V konvergiert.

Ein Vektorraum heißt **Banachraum** genau dann, wenn er normiert und vollständig ist.

Ein Banachraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt erzeugt wird, heißt **Hilbertraum**.

Es ist leicht zu sehen, dass \mathbb{R}^n bezüglich einer jeden Norm ein Banachraum ist. Mit der $\|\cdot\|_2$ -Norm ist er sogar ein Hilbertraum.

Ein weiteres interessanteres Beispiel sind Funktionenräume wie beispielsweise $V = \{f \in \text{Abb}([a, b], \mathbb{R}) \mid f \text{ ist stetig}\}$. Betrachten wir V zusammen mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, so ist der Raum **vollständig**. Betrachteten wir ihn mit der ersten Norm

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

, so ist der Raum **kein** Banachraum, aufgrund von fehlender Vollständigkeit. Man betrachte dazu einfach die Funktionenfolge

B

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ x/n & , 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Wir wissen aus dem zweiten Semester, dass jedes f_n hier zwar stetig ist, aber die Grenzfunktion nicht. Dennoch ist f_n eine Cauchyfolge bezüglich der $\|\cdot\|_1$ -Norm.

Ein anderes Beispiel sei mit $L^1([a, b]) := \{f \in \text{Abb}([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b |f(x)| dx < \infty\}$. Mit dem normalen Riemannintegral, welches wir in C2 näher kennengelernt haben, existieren auch hier Grenzfunktionen, die nicht im Raum liegen, wie beispielsweise die Dirichletfunktion. Nimmt man anstatt der Riemannintegrale allerdings die Lebesgue'schen Integrale, so ergibt sich – interessanterweise – ein vollständiger Raum, sogar ein Banachraum. Es ist sogar ein Hilbertraum unter Verwendung eines bestimmten Skalarproduktes möglich.

Nun zurück zur Frage, wann und unter welchen Bedingungen Fixpunktiterationen konvergieren. Man kann sich *graphisch* überlegen, dass die „Steilheit“ von Φ dabei eine Rolle spielt. Wir definieren:

Definition 1.28 (Kontraktion)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum, $M \subseteq V$ und $\Phi \in \text{Abb}(M, V)$. Wir sagen Φ heie **Kontraktion** genau dann, wenn eine Konstante $0 \leq k < 1$ existiert, so dass für alle $x, y \in M$ gelte, dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k \|x - y\|. \quad (\text{K})$$

Eine Konstante k , welche diesen Zusammenhang erfüllt, heißt auch **Kontraktionskonstante** von Φ .

i Anschaulich bedeutet es, wenn Φ eine Kontraktion ist, dass die Bilder von Φ näher beieinander liegen als die Urbilder von Φ .

Korrolar D1.28 (Stetigkeit)

Eine jede Kontraktion ist stetig.

Das in Definition 1.28 definierte Kriterium für Kontraktionen (K) ist nur sehr umständlich zu überprüfen. Folgender Satz vereinfacht dieses Kriterium, schränkt aber gleichzeitig auch unsere Auswahlmenge an Funktionen ein:

Satz 1.21 (Kontraktionskriterium)

Im Fall $V = \mathbb{R}$ ist für die Kontraktionseigenschaft hinreichend, dass f differenzierbar ist mit $k_* := \sup_{x \in M} |f'| < 1$. k_* ist dann **Kontraktionskonstante** von Φ .

Beweis: Der Mittelwertsatz für $\Phi \in \text{Abb}(M, \mathbb{R})$ mit $M \subseteq \mathbb{R}$ ergibt, dass für alle $x, y \in M$ ein $\xi \in M$ existiert, so dass $\Phi(x) - \Phi(y) = \Phi'(\xi) \cdot (x - y)$. Daraus folgt, dass

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq \sup_{z \in M} |\Phi'(z)| \cdot |x - y|.$$

Man erkennt nun leicht, dass Φ genau dann eine Kontraktion ist, wenn $\sup_{z \in M} |\Phi'(z)| < 1$ ist, womit die Behauptung gezeigt ist. □

i Es ist sicherlich auch möglich Satz 1.21 auch auf $V = \mathbb{R}^n$ anzupassen, dann heie die Bedingung $\sup_{x \in M} \|\mathcal{J}f(x)\| < 1$. In diesem Fall ist es aber notwendig zu spezifizieren, welche Matrixnorm man verwendet und überhaupt Normen auf Matrizen ersteinmal zu definieren.

Wir kommen nun zu einer Art „Hauptsatz“ in unserem Kapitel über Fixpunktiterationen, dem Fixpunktsatz von Banach. Mit ihm wollen alles, was wir bislang über Fixpunkte und ihre Iterationen gelernt haben zusammenfassen um eine möglichst allgemeine Aussage über die Konvergenz von Fixpunktiterationen zu treffen.

Satz 1.22 (Fixpunktsatz von BANACH)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein **Banachraum** und sei $\emptyset \neq M \subseteq V$ eine **abgeschlossene Teilmenge** von V . Sei $\Phi \in \text{Abb}(M, V)$ **selbstabbildend**, sprich $\Phi(M) \subseteq M$, sowie eine **Kontraktion**. Dann hat Φ **GENAU** einen Fixpunkt $x_* \in M$ und x_* ist Grenzwert der Folge (x_n) , wobei $x_0 \in M$ **beliebig** ist.

Sei k zudem noch eine Kontraktionskonstante von Φ , so fällt der Approximationsfehler in jedem Iterationsschritt um mindestens den Faktor k , also

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq k \|x_n - x_*\| \quad \text{damit auch} \quad \|x_n - x_*\| \leq k^n \|x_0 - x_*\|$$

Beweis: Wir sehen schnell, dass aufgrund der Selbstabbildungseigenschaft von Φ die Folge (x_n) , $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ mit einem $x_0 \in M$, wohldefiniert ist. Sei also nun $x_0 \in M$ wohldefiniert ist. Sei also

nun $x_0 \in M$. Nachdem Φ kontrahierend ist, muss ein $\lambda \in [0, 1)$, so dass für alle $x, y \in M$ gilt, dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \lambda \cdot \|x - y\|.$$

Mit Kombination dieser Eigenschaften folgt:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})\| \\ &\leq \lambda \cdot \|x_n - x_{n-1}\| &= \lambda \cdot \|\Phi(x_{n-1}) - \Phi(x_{n-2})\| \\ &\leq \lambda^2 \cdot \|x_n - x_{n-1}\| &= \lambda^2 \cdot \|\Phi(x_{n-1}) - \Phi(x_{n-2})\| \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^n \cdot \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist auch der Grund für die obige Fehlerabschätzung. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung und dem vorherigen Resultat gilt für $0 \leq n < m$, dass

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \lambda^{m-1} \|x_1 - x_0\| + \cdots + \lambda^n \|x_1 - x_0\| \\ &= \lambda^n \cdot \sum_{i=0}^{m-1-n} \lambda^i \cdot \|x_1 - x_0\| \\ &\stackrel{(*)}{=} \lambda^n \cdot \frac{1 - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda} \cdot \|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{\lambda^n - \lambda^m}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\|, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle (*) der Grenzwert der geometrischen Reihe verwendet wurde, da $0 \leq \lambda < 1$ ist. Unter der Voraussetzung, dass man $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nun so wählt, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\frac{\lambda^{n_0(\varepsilon)}}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| < \varepsilon$$

gilt, so ist (x_n) eine Cauchyfolge. Da M eine Teilmenge des – insbesondere vollständigen – Banachraums $(V, \|\cdot\|)$, besitzt (x_n) **genau** einen Grenzwert $x_* \in M$, da alle $x_i \in M$ und M abgeschlossen. Da Φ als Kontraktion stetig ist (siehe Korollar D1.28), gilt, dass der Grenzwert der Fixpunktiteration der Fixpunkt sein muss: $\Phi(x_i) = x_*$. Dieser ist dann sogar **eindeutig**. Denn angenommen er wäre es nicht, das heißt es gäbe ein $\tilde{x} \in M$ mit $\tilde{x} \neq x_*$, aber $\Phi(\tilde{x}) = \tilde{x}$, dann gilt:

$$\|\tilde{x} - x_*\| = \|\Phi(\tilde{x}) - \Phi(x_*)\| \leq \lambda \cdot \|\tilde{x} - x_*\| < \|\tilde{x} - x_*\|,$$

da Φ eine Kontraktion ist und somit $\lambda < 1$. Dies führt aber genau zu einem Widerspruch, aus welchem dann folgt, dass x_* einzelner, eindeutiger Fixpunkt der Kontraktion Φ ist. \square

Satz 1.22 ist „**konstruktiv**“, damit erklärt er insbesondere auch den Weg zum Fixpunkt und nicht nur Existenz oder Eindeutigkeit.

i Falls $M = V$, so ist sowohl die Eigenschaft der Abgeschlossenheit, als auch die Selbstabbildungseigenschaft **trivialerweise** erfüllt.

1.7.2 Zusammenhang zwischen dem Nullstellenproblem und dem Newton-Verfahren

Eine bislang noch unbeantwortete, aber durchaus berechnete, Frage ist die Motivation für Fixpunkte. Hier lassen sich die verschiedensten Punkte anführen, wie zum Beispiel das Anwenden auf Nullstellenprobleme, die wir in diesem Kapitel behandeln werden, andererseits kann man Fixpunkte und Fixpunktiterationen als Grundlage von Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme verwenden – was wir in Kapitel 1.7.4 sehen werden – und ebenso können sie die Grundlage für den ein oder anderen Beweis darstellen, was bereits in dem Kurzbeweis zu Satz 1.6 geschehen ist und auch noch an anderer Stelle – beim Beweis des Satzes 2.12 – deutlich gemacht wird. Beschränken wir uns an dieser Stelle aber erstmal mit normalen Nullstellenproblemen. Wir definieren das Nullstellenproblem wie folgt:

Definition 1.29 (Nullstellenproblem)

Sei $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben und stetig – gegebenenfalls sogar stetig differenzierbar. Gesucht ist ein/das $x_* \in \mathbb{R}$ mit $f(x_*) = 0$.

Wir wollen nun dieses Problem in ein Fixpunktproblem umwandeln. Es ergibt sich:

Definition 1.30 (Das Fixpunkt basierte Nullstellenproblem)

Für vorgegebenes $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, suche ein $\Phi \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, so dass

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) = x,$$

das heißt x_* ist Nullstelle von f genau dann, wenn x_* ein Fixpunkt von Φ ist.

Die in Definition 1.30 gestellte Aufgabe mag auf den ersten Blick nahezu trivial erscheinen, so es doch viele solcher Φ -Funktionen gibt, die die obige Bedingung auch tatsächlich erfüllen. Unser eigentliches Ziel ist es jedoch ein Φ zu finden, das obiger Bedingung genügt und **gleichzeitig** noch eine **Kontraktion** ist.

! Man mag sich wundern, warum wir eine Kontraktion suchen, dabei muss man nur einen Blick in Satz 1.22 werfen, in dessen eine Kontraktion zu den vielen Voraussetzungen zählt. Wir wollen hier auch Satz 1.22 anwenden, da wir letztenendes ja das Problem lösen wollen und dies –für uns zumindest – nur mit einer Kontraktion auf die wir den Fixpunktsatz von Banach anwenden können gelingt.

Veranschaulichung

i Um Definition 1.30 zu erfüllen, addiere x auf beiden Seiten. $f(x_*) + x_* = x_*$ ist das Fixpunktproblem von $\Phi(x) := f(x) + x$. Wir rechnen – gemäß Satz 1.21 – $\Phi'(x) = f'(x) + 1$. Damit Φ eine Kontraktion ist, muss Φ' in einer gewählten Umgebung M , in der f selbstabbildend ist, betragsmäßig echt kleiner als 1 sein. Wir erkennen, dass dies nur auf wenige Funktionen f zutrifft.

Ebenso ist $-f(x_*) + x_*$ das Fixpunktproblem zu $\Phi(x) := x - f(x)$. Auch hier bestimmen wir $|\Phi'(x)| = |1 - f'(x)|$. Es muss dann $|\Phi'| \leq k < 1$ für ein $k \in [0, 1)$ in einer selbstabbildenden Umgebung $K_\varepsilon(x_*)$ gelten.

1.7.2.1 Allgemeiner Ansatz I: Multiplikation mit einer Konstanten λ

Der erste Ansatz an eine Kontraktion Φ zu kommen ist ähnlich dem Beispiel oben:

Definition 1.31 („Erweiterung“ des Fixpunktbasierten Nullstellenproblems)

Multipliziere, für ein $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ zunächst mit einem $\lambda \neq 0$ und addiere dann x . Wir erhalten damit:

$$f(x) = 0 \iff \underbrace{x + \lambda \cdot f(x)}_{=: \Phi(x)} = x$$

Damit Φ eine Kontraktion ist, muss gelten, dass in $K_\varepsilon(x_*)$ $|\Phi'| = |1 + \lambda f'(x)| \leq k < 1$ mit selbstabbildenden Umgebung $K_\varepsilon(x_*)$. Damit liegt es nahe das λ wie folgt zu wählen:

$$\lambda := -\frac{1}{f'(x_*)},$$

denn dann ist zumindest $\Phi'(x_*) = 0$ und wenn f' und damit auch Φ' stetig ist, ist $|\Phi'(x)|$ auch in der Umgebung um x_* kleiner als 1. Das einzige Problem hierbei ist, dass x_* bei der Bestimmung von λ a priori **nicht bekannt** ist. Wir wählen deswegen eine Näherung anstatt.

Beispiel 1.7: Es soll eine Nullstelle x_* von $f(x) := x^2 - 8$ berechnet werden. Das Nullstellenproblem für f ist äquivalent zum Fixpunktproblem für $\Phi(x) := x + \lambda f(x)$ mit $\lambda \neq 0$. Wähle für λ also $-\frac{1}{f'(x_*)}$, sprich eine Näherung an die Nullstelle. Wir schätzen $f(3) \approx 0$. Wähle also $\lambda = -\frac{1}{6}$. Damit sieht unser Fixpunktproblem wie folgt aus:

$$\Phi(x) = x - \frac{x^2 - 8}{6}$$

Wir iterieren also:

$$\begin{aligned} x_1 = \Phi(x_0) &= 3 - \frac{9 - 8}{6} &&= 2,8\bar{3} \\ x_2 = \Phi(x_1) &= 2,8\bar{3} - \frac{(2,8\bar{3})^2 - 8}{6} &&\approx 2,828707 \\ x_3 = \Phi(x_2) &&&\approx 2,828442929 \end{aligned}$$

Im Vergleich dazu der exakte Wert $x_* = \sqrt{8} \approx 2,828427125 \dots$

Wir vermuten aufgrund der sinkenden Differenz zwischen x_n und x_* , dass die Folge (x_n) gegen die gesuchte Nullstelle von f konvergiert. Wir wollen dies nun mathematisch korrekt unter Verwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes (Satz 1.22) zeigen.

Wir überprüfen dazu Schritt für Schritt die Voraussetzungen des Satzes:

- $V = \mathbb{R}$, $(V, \|\cdot\|)$ ist Banachraum, da \mathbb{R} vollständig und normiert ✓
- Sei $M = [2, 3]$. $M \neq \emptyset$ und $M \subset V = \mathbb{R}$, und M ist abgeschlossen ✓
- Für $M = [2, 3]$ ist $\Phi'(x) = 1 - \frac{x}{3}$, also $\Phi'(3) = 0 \leq \Phi' \leq \frac{1}{3} = \Phi'(2)$. Damit ist Φ monoton fallend auf M , weswegen gilt: $M \ni \Phi(2) = 2\frac{2}{3} \leq \Phi(x) \Big|_M \leq \Phi(3) = 2\frac{5}{6} \in M$, woraus die Selbstabbildungseigenschaft folgt. ✓
- Da $\Phi''(x) = -\frac{1}{3}$, ist Φ' ist damit monoton steigend auf M , somit ist $\sup_{x \in M} |\Phi'(x)| = \frac{1}{3} =: k < 1$, Φ ist Kontraktion mit Kontraktionskonstante $k = \frac{1}{3}$. ✓

Damit muss Φ gegen die gesuchte Nullstelle konvergieren.

Wir ermitteln zum Schluss noch den Approximationsfehler:

n	x_n	$ x_n - x_* $
0	3	0,17157
1	2,833333333	0,00490622
2	2,828703703	0,000276578
3	2,828442929	0,000015804
4	2,828428028	0,000000900
\vdots	\vdots	\vdots
	$\rightarrow \sqrt{8} =: x_*$	$\rightarrow 0$

Wir erkennen, dass der Approximationsfehler durch k beschränkt ist. //

i Wir waren dieses Mal in der Lage, rigoros zu überprüfen, dass für die von uns konstruierte Fixpunktiteration die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach erfüllt sind. Dazu haben wir ein $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $\Phi \in \text{Abb}(M, M)$ angegeben, so dass die Kontraktionskonstante von Φ echt kleiner eins war. Wichtig ist hier vor allem die richtige Wahl von M , denn auf $M = \mathbb{R}$ wäre Φ **sicher** keine Kontraktion.

! In der Praxis mag es nicht immer – so einfach – möglich sein die Kontraktionseigenschaft **nachzuweisen** oder ein konkretes M **anzugeben**. Man kann natürlich auch darauf verzichten, dann bleibt aber die Unsicherheit, wie der Startwert genau zu wählen ist ...

Konvergenzgeschwindigkeit Laut Theorie fällt der Fehler pro Schritt um den Faktor k . Wie eben aber schon angemerkt, kann es unter Umständen relativ schwer sein dieses k zu berechnen – auch wegen der Voraussetzung an ein bekanntes M . Wir können jedoch – a posteriori – leicht eine „**asymptotische Kontraktionskonstante**“ $k_* := „\Phi'(x_*)“$ angeben, die im Grenzwert $x_n \rightarrow x_*$ die Fehlerreduktion beschreiben sollte, sofern $\Phi \in C^1$ versteht sich. Wir definieren deswegen wie folgt:

Definition 1.32 (Kontraktionskonstante und asymptotische Kontraktionskonstante)

Für ein stetig differenzierbares $\Phi \in \text{Abb}(M, \mathbb{R})$ mit $M \subseteq \mathbb{R}$ und einem Fixpunkt $x_* \in M$ heiÙe

$$k := \sup_{x \in M}$$

die **Kontraktionskonstante**.

Des Weiteren heiÙe bei gleichem Φ , M und x_*

$$k_* = |\Phi'(x_*)|$$

die **asymptotische Kontraktionskonstante**. Dabei ist $k_* \leq k$.

Erläuterung 1.32

Es gilt $k_* \leq k$.

k gibt an, um wieviel sich der Fehler pro Iterationsschritt $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ **mindestens** verringert:

$$|x_{n+1} - x_*| \leq k \cdot |x_n - x_*|$$

k_* hingegen gibt – bei hinreichend großem n mit $x_n \approx x_*$ – im Allgemeinen einen besseren **Schätzwert** für die **zu erwartende Fehlerreduktion** pro Iterationsschritt ab:

$$|x_{n+1} - x_*| \approx k_* \cdot |x_n - x_*|$$

Bei unserem Beispiel wäre $k_* = \left| \Phi'(\sqrt{8}) \right| = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{8} \approx \frac{1}{17,5}$. In der Tat fällt der Fehler von x_1 auf x_2 , x_2 auf x_3 und x_3 auf x_4 um ziemlich genau den Faktor k_* . Lediglich der Startwert ist zu weit von x_* entfernt, hier ist k_* **nicht gültig**.

1.7.2.2 Allgemeiner Ansatz II: Multiplikation mit einer Funktion

Ein weiterer Ansatz das fixpunktbasierte Nullstellenproblem zu lösen ist die Multiplikation mit einer vorgegebenen Funktion g . Wir definieren also auch hier:

Definition 1.33 („Zweite Erweiterung“ des fixpunktbasierten Nullstellenproblems)

Anstatt mit einem $\lambda \neq 0$ multipliziere $f(x) = 0$ mit einer Funktion $h \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, wobei $h \neq 0$, und addiere anschließend den Linearterm x .

$$f(x) = 0 \iff \underbrace{x + h(x) \cdot f(x)}_{=: \Phi(x)} = x$$

Damit ist das Nullstellenproblem äquivalent zum Fixpunktproblem mit $\Phi(x) := x + h(x) \cdot f(x) \stackrel{!}{=} x$.

Um eine möglichst gute Konvergenz zu erhalten, minimieren wir k_* :

$$k_* = \left| \Phi'(x_*) \right| = \left| 1 + \underbrace{h'(x_*) \cdot f(x_*)}_{=0} + h(x_*) \cdot f'(x_*) \right| = \left| 1 + h(x_*) \cdot f'(x_*) \right|$$

Wir sehen k_* wird minimal – sprich nimmt den Wert null an – genau dann, wenn $h(x_*) = -\frac{1}{f'(x_*)}$. Wir wählen deshalb:

$$h(x) := -\frac{1}{f'(x)},$$

somit ist

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Unsere Iteration lautet damit:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Diese kennen wir so bereits aus dem zweiten Semester, als wir das Newton-Verfahren kennengelernt haben. Wir rekapitulieren und erweitern unsere Verfahrensdefinition aus C2:

Verfahren 1.4 (Das Newton-Verfahren als Fixpunktiteration)

Das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

zur Bestimmung einer Nullstelle x_* von f ist eine Fixpunktiteration, und zwar für die Funktion

$$\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Die asymptotische Kontraktionskonstante ist hierbei 0.

Beispiel 1.7 (Fortsetzung): Sei f wieder wie oben, unser Φ bestimmt sich dann durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}x + \frac{4}{x}.$$

Die Fixpunktiteration durch Newton liefert:

n	x_n	$ x_n - x_* $
0	3	$1,7157 \cdot 10^{-1}$
1	2,83333333333333333333333333333333	$4,90621 \cdot 10^{-3}$
2	2,8284313725490196078	$4,24780 \cdot 10^{-6}$
3	2,8284271247293798213	$3,18972 \cdot 10^{-12}$
4	2,8284271247261900976	$1,79859 \cdot 10^{-24}$
\vdots	\vdots	\vdots



Wir erkennen hier:

i Das Newton-Verfahren hat eine Fehlerreduktion der Form $\|x_{n+1} - x_*\| \approx c \cdot \|x_n - x_*\|^2$, sollte man $f \in \mathcal{C}^2$ und $f'(x_*) \neq 0$ voraussetzen.

Auch diese Erkenntnis haben wir im zweiten Semester aus dem Newton-Verfahren gezogen. Wir definieren deswegen ebenso:

Definition 1.34 (Lineare und quadratische Konvergenz)

Sei $(x_n) \subset (V, \|\cdot\|)$ eine Folge mit Grenzwert $x_* \in V$ und V sei normiert. Das Verfahren heie ...

... **linear konvergent** genau dann, wenn für ein $k < 1$ der Zusammenhang $|x_n - x_*| \leq k \cdot |x_{n-1} - x_*|$ erfüllt ist.

... **quadratisch konvergent** genau dann, wenn für ein $c > 0$ der Zusammenhang $\|x_n - x_*\| \approx c \cdot \|x_{n-1} - x_*\|^2$ erfüllt ist.

An dieser Stelle folgt nun ein abschließender Satz dieses Kapitels, hier an dieser Stelle allerdings ohne Beweis, eine Beweisidee sei mit dem Satz von Taylor genannt:

Satz 1.23 (Hinreichendes Kriterium für quadratisches Konvergenzverhalten)

Eine Fixpunktiteration sei mindestens **quadratisch konvergent** genau dann, wenn die asymptotische Kontraktionskonstante k_* gleich null ist.

i Fixpunktiterationen sind also im Allgemeinen – sofern die Voraussetzungen des Satzes 1.22 erfüllt sind – **linear konvergent**, das heißt der Fehler reduziert sich pro Iterationsschritt mindestens um die Kontraktionskonstante k . Als gute Näherung für die Fehlerabschätzung kann – bei hinreichender Nähe zu x_* – auch die asymptotische Kontraktionskonstante k_* verwendet werden.

1.7.3 Verallgemeinerung des Newton-Verfahrens auf den \mathbb{R}^m

Wir sehen in der Praxis häufig nichtlineare Gleichungssysteme, die zu lösen sind. Beispiele hierfür haben wir bereits in Kapitel 1.1 mit $\nabla f \stackrel{!}{=} 0$ oder 1.2 mit dem Lagrangeformalismus gesehen. Wir wollen nun allgemein solche Systeme beschreiben und uns dann ein numerisches Verfahren zur Lösung ebendieser Systeme überlegen.

Definition 1.35 (Nichtlineares System)

Sei $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir sagen zu der Gleichung

$$f(x) \stackrel{!}{=} 0,$$

sie sei ein **nichtlineares System aus m Gleichungen**, wenn jede Komponente aus f eine dieser Gleichungen beschreibt.

Definition 1.35 beschreibt damit ein Nullstellenproblem im \mathbb{R}^m . Wir wollen auch in diesem Fall ein Newtonverfahren herleiten.

Möglichkeit 1 — Linearisierung Wir argumentieren ganz analog wie im zweiten Semester. Verwenden wir die Taylorentwicklung um $x = x_n$. Die aktuelle Iterierte sei damit

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{T_n(x)}_{\rightarrow \text{Linearisierung}} + \underbrace{f_R(\xi)}_{\rightarrow \text{Restterm}} \\ &= f(x_n) + (Jf(x_n)) \cdot (x - x_n) + f_R(\xi) \end{aligned}$$

Statt $f(x)$ setzen wir nun die Linearisierung gleich null und erhalten damit einen Näherungswert, der die neue Iterierte wird, also $T(x_{n+1}) \stackrel{!}{=} 0$. Ist nun $Jf(x_n)$ invertierbar, so folgt:

$$x_{n+1} := x_n - [Jf(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

Möglichkeit 2 — Modellierung als Fixpunktproblem Das Nullstellenproblem für f ist äquivalent zum Fixpunktproblem für

$$\Phi(x) := x - [Jf(x)]^{-1} f(x),$$

vorausgesetzt das Inverse von $Jf(x)$ existiert. Das heißt: $\Phi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$

Damit ergibt sich die zugehörige Fixpunktiteration:

$$x_{n+1} := \Phi(x_n) = x_n - [Jf(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

Wir definieren damit das Newtonverfahren im \mathbb{R}^n wie folgt:

Verfahren 1.5 (Newtonverfahren im \mathbb{R}^n)

Sei $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \in \mathcal{C}^2(D)$ und es sei die Jacobimatrix $Jf(x)$ invertierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. So lautet das **Newtonverfahren** zur Bestimmung einer Nullstelle von f :

$$x_{n+1} := x_n - [Jf(x_n)]^{-1} \cdot f(x_n)$$

Das Verfahren ist – wie im skalaren Fall – **lokal quadratisch konvergent**.

Definition 1.36 (Lokale quadratische Konvergenz)

Es existiere eine Umgebung $U_\varepsilon(x_*)$ um x_* derart, dass wenn der Startwert $x_0 \in U_\varepsilon(x_*)$ aus ebendieser Umgebung gewählt sei, das Verfahren dann **quadratisch konvergent** heie. Lokal ist in diesem Fall dann tatsächlich als Umgebung zu verstehen.

! Man kennt im Allgemeinen U , respektive die Gree von U , **nicht** oder hat nur sehr schwere, sehr rechenaufwändige Formeln für sie.

Man kann die in Verfahren 1.5 getroffene Voraussetzung an die Invertierbarkeit von Jf wie folgt abschwächen:

- Ein erster Gedanke ist, dass es per se ersteinmal reicht, wenn $Jf(x)$ nur für alle x aus der Umgebung $U_\varepsilon(x_*)$ der Nullstelle invertierbar ist. Die lokale quadratische Konvergenzeigenschaft bleibt so erhalten.
- Es reicht sogar, da $Jf \in \mathcal{C}^1$, dass $Jf(x_*)$ invertierbar ist, um auf lokale quadratische Konvergenz in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_*)$ zu schließen.

Wie invertiert man die Jacobimatrix effizient? Eine sich jetzt noch der Effektivitätssteigerung bemühte Frage wäre die effiziente Invertierung der Jacobimatrix $\mathcal{J}f$. Die Antwort auf die Frage ist das Auslassen eines jeglichen Invertierschrittes. Dies ist möglich, da es reicht ein lineares Gleichungssystem zu lösen, um den Newtonschritt durchzuführen. Wir schreiben dazu die Iterationsvorschrift um zu

$$(\mathcal{J}f)(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$$

Wir führen dann die Hilfsgröße Δx mit der Eigenschaft $\Delta x = x_{n+1} - x_n$ ein und erhalten somit:

Verfahren 1.6 („Effizienteres“ Newtonverfahren im \mathbb{R}^n)

- ① Löse das lineare Gleichungssystem $(\mathcal{J}f)(x_n) \cdot \Delta x = -f(x_n)$
- ② Setze $x_{n+1} := x_n + \Delta x$

1.7.4 Fixpunktverfahren für Gleichungssysteme

Wir kennen bereits ein – **allgemeingültiges** – **terminierendes** Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen. Man stellt sich also jetzt die Frage, warum es numerische Verfahren für ein solches – in unseren Augen – *trivial erscheinendes* Problem gesucht werden. Wir geben an dieser Stelle zwei Motivationspunkte:

- ① Das Gaußverfahren hat eine Laufzeitkomplexität von $\mathcal{O}(n^3)$, wie wir im ersten Semester festgestellt haben, und hat damit unter Umständen für manche – häufig in der Praxis vorkommende – lineare Gleichungssysteme einen **vergleichsweise hohen Rechenaufwand**. Numerische Verfahren können hier unter Umständen schneller sein.
- ② Der sogenannte **Auslöschungseffekt** kann auftreten.
Durch die Verwendung von Gleitkommazahlen, welche dem Informatiker aus verschiedenen Veranstaltungen bereits bekannt sein sollten, werden Zahlen aufgrund der **festen** Mantisse mit einem gewissen relativen **Rundungsfehler** gespeichert. Der Fehler ist ursprünglich die Anzahl an Mantissenziffern, kann aber durch gewisse Rechenoperationen **drastisch erhöht werden**. Man nennt diesen Effekt dann **Auslöschung**. Wir betrachten dazu folgendes **Beispiel 1.8**: 16-ziffrige Mantisse

$$0,\underbrace{7948236243749276}_{\text{Fehler von } 10^{-16}} - 0,\underbrace{7948236243749241}_{\text{Fehler von } 10^{-16}} = \underbrace{0,35}_{\text{Fehler von } 10^{-2}} \cdot 10^{-14}$$

⊗

Der Auslöschungseffekt führt auch zu großen Problemen beim Lösen von linearen Gleichungssystemen, denn bei großem n sind derart viele Rechenoperationen notwendig, dass die Wahrscheinlichkeit eines Auslöschungseffekts **sehr hoch** ist. Man mag zwar Techniken zur Reduzierung dieser Wahrscheinlichkeit finden, jedoch gibt es auch lineare Gleichungssysteme, bei denen durch die **nicht entfernbare** Auslöschung, die numerisch ermittelte Lösung **nicht mal im entferntesten** mit der tatsächlichen übereinstimmt.

Fixpunktiterationen sind, durch die wegen der Kontraktionseigenschaft auftretende Dämpfung eines eventuell auftretenden Fehlers mit einem Faktor $k < 1$, weniger anfällig für große Auslöschungseffekte.

Unser Konzept zur Herleitung iterativer Verfahren für lineare Gleichungssysteme Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soll in ein Fixpunktproblem umgewandelt werden. Wir verwenden einen ähnlichen Ansatz wie schon in Kapitel 1.7.2.1. Dazu suchen wir uns eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, multiplizieren diese mit $b - Ax = 0$ und addieren anschließend x . Wir erhalten dadurch

$$x - MAx + Mb = x \Leftrightarrow \underbrace{(E_n - MA)x + Mb}_{=: \Phi(x)} = x,$$

womit unser Φ festgesetzt ist. Damit nun die Kontraktionseigenschaft erfüllt ist, und damit auch die Voraussetzungen des Satzes 1.22, muss

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|(E_n - MA)(x - y)\| \stackrel{!}{\leq} k \|x - y\|$$

gelten. Ideal wäre dafür selbstverständlich die Wahl von M als das Inverse der Matrix A . Gangbar ist dieser Ansatz aber nur dann, wenn man eine Näherung M an die Matrix A^{-1} kennt. Stellen wir A als Summe von Diagonalmatrix D und Restmatrix R dar, so können wir – unter der Bedingung, dass R „klein“ sei – M als das Inverse von D setzen, da $D^{-1} \approx A^{-1}$, wobei sich D^{-1} trivial berechnen lässt. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (E_n - MA)x + Mb &= (E_n - \overbrace{D^{-1}}^M \underbrace{(D + R)}_A)x + \overbrace{D^{-1}}^M b \\ &= (E_n - E_n - D^{-1}R)x + D^{-1}b = -D^{-1}Rx + D^{-1}b. \end{aligned} \tag{\Phi_{LGS}}$$

Wir beschäftigen uns nun mit zwei Verfahren, welche ebendiese Idee aufgreifen, das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren.

1.7.4.1 Jacobi-Verfahren

Verfahren 1.7 (Jacobi-Verfahren / Gesamtschrittverfahren)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^k \times \times$ mit $n \in \mathbb{N}$. Seien alle Diagonaleinträge a_{ii} ungleich 0. Wir konstruieren uns gemäß dem Beispiel oben (Φ_{LGS}) ein $\Phi(x) := -D^{-1}Rx + D^{-1}b$. Die Fixpunktiteration $x_{m+1} := \Phi(x_m)$ mit dem so konstruierten Φ heiße dann **Jacobi-** oder auch **Gesamtschrittverfahren**. Ein Iterationsschritt sehe dabei wie folgt für alle $i = 1, \dots, n$ aus:

$$(x_{m+1})_i := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} a_{ij}(x_m)_j \right)$$

Beispiel 1.9: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix},$$

und die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$

$$x_* = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{22}{9} \end{pmatrix}.$$

Wir wählen den Startwert $x_0 = 0$ und definieren den Fehler der Stufe n als $e_n = \|x_n - x_*\|_\infty = \max_i \{|x_{n,i} - x_{*,i}|\}$.

Wir wollen eine näherungsweise Lösung mittels Jacobi-Verfahren (Verfahren 1.7) bestimmen. Dazu

führen wir die ersten vier Schritte durch:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6/4 \\ 4/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{Schritt 1})$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 11/9 \end{pmatrix} \quad (\text{Schritt 2})$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11/9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11/9 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 13/16 \\ 5/2 \end{pmatrix} \quad (\text{Schritt 3})$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/16 \\ 5/2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/2 \\ -13/16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 77/32 \end{pmatrix} \quad (\text{Schritt 4})$$

Wir stellen damit die Fehlerwerte auf ...

n	e_n
0	22/9
1	11/18
2	11/36
3	11/144
4	11/288

... und erkennen, dass nach dem vierten Schritt nur noch eine Abweichung von weniger als vier Prozent vorhanden ist. \otimes

Konvergenz des Jacobiverfahrens Neben Satz 1.22 wollen wir uns nun mit Satz 1.24 eine einfachere Methode überlegen, um die Konvergenz des Jacobiverfahrens (1.7) nachzuweisen. Zuerst definieren wir aber Normen auf Matrizen.

Definition 1.37 (Matrixnorm)

Seien V, W normierte Vektorräume und die Abbildung $F \in \text{Abb}(V, W)$ linear (also $F \in L(V, W)$). Dann heiÙe

$$\|F\| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Fv\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\|_V=1} \|Fv\|_W$$

die **Operator-** oder auch **Matrixnorm** von F .

Definition 1.38 (Spektralradius)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, so heiÙe

$$\rho(A) := \max_{i=1, \dots, m} |\lambda_i(A)|,$$

wobei $\lambda_i(A)$ der i -te Eigenwert von A sei, der **Spektralradius** von A .

$\|\cdot\|_1$ — Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

 $\|\cdot\|_2$ — Spektralnorm

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$$

Dabei ergibt sich für ein invertierbares A der Zusammenhang $\|A\|_2 = \rho(A)$

 $\|\cdot\|_\infty$ — Zeilensummennorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

Wir definieren noch eine weitere Eigenschaft von Matrizen, deren Diagonaldominanz, mittels dessen uns der Ausdruck der Bedingung aus Satz 1.24 leichter fällt.

Definition 1.39 (Diagonaldominanz)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so heie $A \dots$

... **(zeilenweise) diagonaldominant** genau dann, wenn für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

gilt.

... **(zeilenweise) schwach diagonaldominant** genau dann, wenn für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

gilt.

... **spaltenweise diagonaldominant** genau dann, wenn für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

gilt.

... **spaltenweise schwach diagonaldominant** genau dann, wenn für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

gilt.

Damit ist es uns nun möglich Satz 1.24 zu formulieren.

Satz 1.24 (Hinreichendes Konvergenzkriterium)

Sei Φ wie in (Φ_{LGS}) , dann ist Φ eine Kontraktion bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm auf ganz \mathbb{R}^n , falls die Systemmatrix A **diagonaldominant** ist. Damit konvergiert Verfahren 1.7.

Beweis: Wir betrachten wieder die Iterationsformel aus Verfahren 1.7

$$x_{m+1,i} := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} a_{ij} x_{m,j} \right),$$

sowie die Differenz zweier – so erzeugten – Vektoren x und y

$$x_{m+1,i} - y_{m+1,i} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} a_{ij} (x_{m,j} - y_{m,j}) \right).$$

Damit folgt dann:

$$|x_{m+1,i} - y_{m+1,i}| \leq \underbrace{\frac{1}{a_{ii}} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|}_{<1} \cdot |x_{m,j} - y_{m,j}| \leq k \cdot |x_{m,j} - y_{m,j}|,$$

wobei $k < 1$ wegen der Diagonaldominanz hält und mit diesem Zusammenhang folgt dann unmittelbar, dass

$$\|x_{m+1} - y_{m+1}\|_\infty \leq k \cdot \|x_m - y_m\|_\infty,$$

was der Definition einer Kontraktion (Definition 1.28) entspricht. \square

Korollar 1.24

Falls die Systemmatrix A diagonaldominant sei, so ist Φ eine Kontraktion bezüglich **jeder** Norm, da im \mathbb{R}^n alle Normen äquivalent sind.

Effizienzsteigerung beim Jacobiverfahren Vor allem bei den mittels Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen entstehenden linearen Gleichungssystemen ist zwar das Jacobiverfahren im Allgemeinen konvergent, jedoch ist die Kontraktionskonstante k nahe 1. Ein Lösungsvorschlag, der hier näher diskutiert werden soll, ist die **Relaxation**.

Wir wissen, dass $x_{n+1} = D^{-1}b - D^{-1}Ax_n$. Damit folgt unmittelbar, dass

$$x_{n+1} = D^{-1}(D - A)x_n + D^{-1}b = (E_n - D^{-1}A)x_n + D^{-1}b = x_n + \underbrace{D^{-1}(b - Ax_n)}_{\Delta x}.$$

Wir gewichten Δx dann mit einem Parameter $\omega \in (0, 2)$ und erhalten so

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m + \omega \Delta x_m = x_m + \omega D^{-1}(b - Ax_m) = \underbrace{(E_n - \omega D^{-1}A)}_{=: M(\omega)} x_m + \omega D^{-1}b \\ &= M(\omega)x_m + \omega D^{-1}b, \end{aligned}$$

womit dann die neue Fixpunktiteration durch

$$\Phi(x) = M(\omega)x + \omega D^{-1}b \tag{1.14}$$

bestimmt ist. An dieser Stelle sei noch erwähnt:

Definition 1.40 (Über- und Unterrelaxation)

Sei Φ wie in (1.14), so heiÙe das Verfahren ein ...

... **Überrelaxationsverfahren** genau dann, wenn ω echt **größer** als 1 ist und

... **Unterrelaxationsverfahren** genau dann, wenn ω echt **kleiner** als 1 ist.

Meistens wählt man $\|M\|_2 < 1$, mit $\|M\|_2 = \rho(M(\omega))$ – da M invertierbar ist, da dann neue Aussagen über $\rho(M(\omega))$ möglich sind. Generell gilt, dass der optimale Wert von ω – an dieser Stelle ohne Beweis, da dies nicht Hauptthema des Semesters ist – sich durch

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{2 - \lambda_{\min} - \lambda_{\max}},$$

wobei λ_{\min} den minimalen und λ_{\max} den maximalen Eigenwert von $M(\omega)$ beschreiben, beschreiben lässt.

1.7.4.2 Gauß-Seidel-Verfahren – Einzelschrittverfahren

Eine weitere Überlegung zur Verbesserung des Jacobiverfahrens ist es bei der Berechnung von $x_{m+1,i}$ die bereits berechneten Komponenten wieder zu verwenden. Denn bei der Berechnung der i -ten Komponente sind die Komponenten $j < i$ des **neuen** Vektors x_{m+1} schon bekannt, es ergibt sich damit folgendes Verfahren.

Verfahren 1.8 (Gauß-Seidel-Verfahren)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^n \times \times$ mit $n \in \mathbb{N}$. Seien des Weiteren alle Diagonaleinträge a_{ii} ungleich 0. Ein Verfahren heiÙe **Gauß-Seidel-** oder auch **Einzelschrittverfahren** genau dann, wenn es zur Berechnung der i -ten Komponente des neuen Vektors die Iterationsvorschrift

$$x_{m+1,i} := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_{m+1,j} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_{m,j} \right),$$

bei der der Unterschied zum Jacobiverfahren (1.7) **blau** hervorgehoben wurde, verwendet.

Beispiel 1.10: Sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

gegeben. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Seidel-Verfahren auf zwei Ziffern ($\rightarrow 10^{-2}$) genau und verwenden Sie als Startwert $x_0 = 0$. Wir betrachten zur Lösung also einerseits

$$x_{n,1} = \frac{1}{4}(6 - 1 \cdot x_{n-1,2})$$

und andererseits

$$x_{n,2} = \frac{1}{3}(8 - 2 \cdot x_{n,1}).$$

Wir erkennen durch Gauß schnell, dass $x_* = (1 \ 1)^T$ ist und rechnen damit aus:

n	$x_{n,1}$	$x_{n,2}$	$\Delta = \ x_{n+1} - x_n\ _\infty$	$\ x_n - x_*\ _\infty$
1	1,5	1,66	1,66	0,5
2	1,08	1,94	0,42	0,08
3	1,01	1,99	0,07	0,01
4	1,0025	1,998	0,008	0,0025

Damit sind wir nach dem vierten Schritt fertig, da der Unterschied echt kleiner als ein Hundertstel ist. ✘

Anmerkungen

Auf der rechten Seite der Iteration stehen wirklich nur bekannte Größen

Das Gauß-Seidel-Verfahren lässt sich platzsparender implementieren, bei der Berechnung von $x_{m+1,i}$ ist $x_{m,i}$ überschreibbar, der Wert wird nicht mehr gebraucht.

Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert im Allgemeinen (bei tridiagonalen Matrizen) um den Faktor **zwei schneller** als das Jacobiverfahren. Einen Beweis dieses Satzes findet sich in Plato, Numerische Mathematik kompakt mit Korollar 10.42.

i Auch das Gauß-Seidel-Verfahren kann man relaxiert auffassen, man nennt dies dann sukzessiv überrelaxiert „*successive overrelaxion*“ (SOR). Die Idee hierbei ist den Zielwert entweder **bewusst** zu „überschießen“ oder **bewusst** das „Überschießen“ abzuschwächen. Auch hier gilt dann $\omega \in (0, 2)$, sonst divergiert das Verfahren. Man erhält dann:

$$x_n = H_\omega x_{n-1} + \omega(D + \omega L)^{-1}b,$$

wobei H_ω definiert ist als

$$H_\omega := (D + \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega R] = E_n - \omega(D + \omega L)^{-1}A.$$

Damit sind wir am Ende der reinen Analysis angekommen, das folgende Kapitel beschäftigt sich nun mehr mit einem Gleichungstyp ähnlich wie in Kapitel 1.3.