Koalgebraische Semantik und Minimierung in Mengen und darüber hinaus

Coalgebraic Semantics and Minimization in Sets and Beyond

Thorsten Wißmann
3. Juni 2020
FAU Erlangen-Nürnberg

Koalgebren	in Mengen	und darüber hinaus
Semantik		
Minimierung		

Koalgebren	in Mengen	und darüber hinaus
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems *Kapitel 3* Orbit-Endliche Verhalten
Minimierung		

Koalgebren	in Mengen	und darüber hinaus	
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems	
		Kapitel 3 Orbit-Endliche Verhalten	
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit		*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff
	Kapitel 6 Verhaltensäquivalenz		

Koalgebren	**in Mengen**	**und darüber hinaus**
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems *Kapitel 3* Orbit-Endliche Verhalten
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit *Kapitel 6* Verhaltensäquivalenz	*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$F\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$

$\mathcal{P}$

$2 \times (-)^A$

$\mathbb{R}^{(-)}$

$F\colon \mathrm{Pos}$

$F\colon \mathrm{Nom}$

F-Koalgebra

Zustandsmenge

$$c\colon C \to FC$$

Beispiel

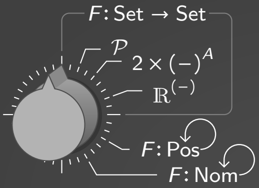
F-Koalgebra-Homomorphismus

$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

Zustandsmenge

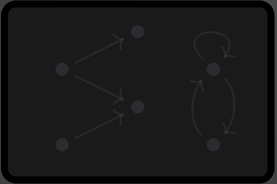
Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$



F-Koalgebra

$$c\colon C \to FC$$

Beispiel



F-Koalgebra-Homomorphismus

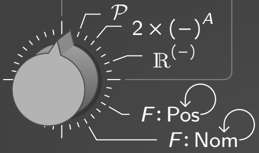
$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

Zustandsmenge

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$F\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$



F-Koalgebra

$$c\colon C \to FC$$

Beispiel

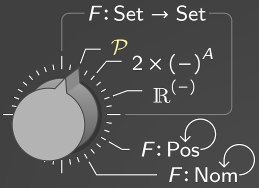
F-Koalgebra-Homomorphismus

$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

Zustandsmenge

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$



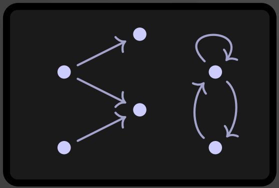
F-Koalgebra

$$c\colon C \to FC$$

$$c\colon C \to \mathcal{P}C$$

„Transitionssystem“

Beispiel



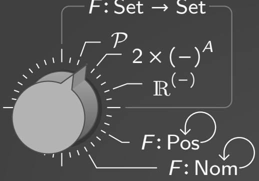
F-Koalgebra-Homomorphismus

$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

„Bisimilarität“

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$



F-Koalgebra

Zustandsmenge

$$c\colon C \to FC$$

Beispiel

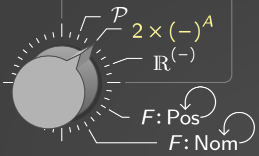
F-Koalgebra-Homomorphismus

$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$F\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$



F-Koalgebra

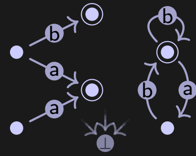
Zustandsmenge

$$c\colon C \to FC$$

$$c\colon C \to 2 \times C^A$$

„Determin. Automat“

Beispiel



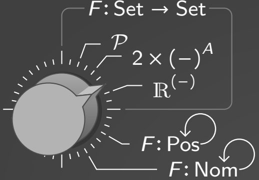
F-Koalgebra-Homomorphismus

$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

„Sprach-Äquivalenz“

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$



F-Koalgebra

Zustandsmenge

$$c\colon C \to FC$$

Beispiel

F-Koalgebra-Homomorphismus

$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

Zustandsmenge

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$

$\mathcal{P}$

$2 \times (-)^A$

$\mathbb{R}^{(-)}$

$F\colon \mathsf{Pos}$

$F\colon \mathsf{Nom}$

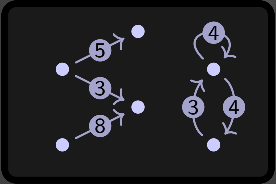
F-Koalgebra

$$c\colon C \to FC$$

$$c\colon C \to \mathbb{R}^{(C)}$$

„Markov-Kette"

Beispiel



F-Koalgebra-Homomorphismus

$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

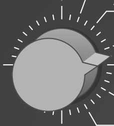
Semantik / Verhaltensäquivalenz:

„Gewichtete Bisimil."

Zustandsmenge

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$F\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$



$\mathcal{P}$

$2 \times (-)^A$

$\mathbb{R}^{(-)}$

$F\colon \mathrm{Pos}$

$F\colon \mathrm{Nom}$

F-Koalgebra

$$c\colon C \to FC$$

Beispiel

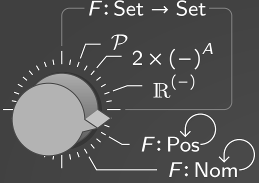
F-Koalgebra-Homomorphismus

$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

Zustandsmenge

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$



F-Koalgebra

$$c\colon C \to FC$$

Beispiel

F-Koalgebra-Homomorphismus

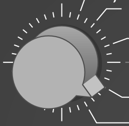
$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

Zustandsmenge

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$



$\mathcal{P}$

$2 \times (-)^A$

$\mathbb{R}^{(-)}$

$F\colon \mathsf{Pos}$

$F\colon \mathsf{Nom}$

F-Koalgebra

$c\colon C \to FC$

$c\colon C \to FX^{\Phi}$

„CTS“

Beispiel

F-Koalgebra-Homomorphismus

$h\colon (C, c) \to (D, d)$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

„Conditional Bisim.“

Zustandsmenge

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$

- $\mathcal{P}$
- $2 \times (-)^A$
- $\mathbb{R}^{(-)}$
- $F\colon \mathsf{Pos} \circlearrowleft$
- $F\colon \mathsf{Nom} \circlearrowleft$

F-Koalgebra

$$c\colon C \to FC$$

Beispiel

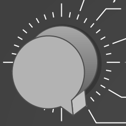
F-Koalgebra-Homomorphismus

$$h\colon (C, c) \to (D, d)$$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$



$\mathcal{P}$

$2 \times (-)^A$

$\mathbb{R}^{(-)}$

$F\colon \mathsf{Pos}$

$F\colon \mathsf{Nom}$

F-Koalgebra

Zustandsmenge

$c\colon C \to FC$

$c\colon C \to FX$

„*Equivariant*“

Beispiel

F-Koalgebra-Homomorphismus

$h\colon (C, c) \to (D, d)$

Semantik / Verhaltensäquivalenz:

„*(α-)Äquiv.-Klassen*“

Instanzen von F-Koalgebren

Transitionssysteme

Deterministische Automaten

Markov-Ketten

Koalgebraische Ergebnisse

Koinduktions-Prinzip

Logik

Algorithmen

Instanzen von F-Koalgebren

Koalgebraische Ergebnisse

Transitionssysteme

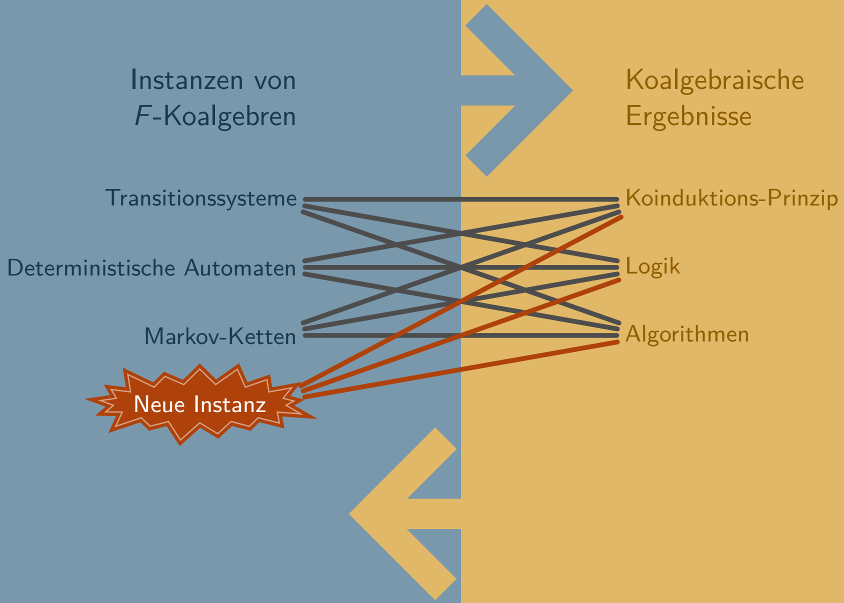
Deterministische Automaten

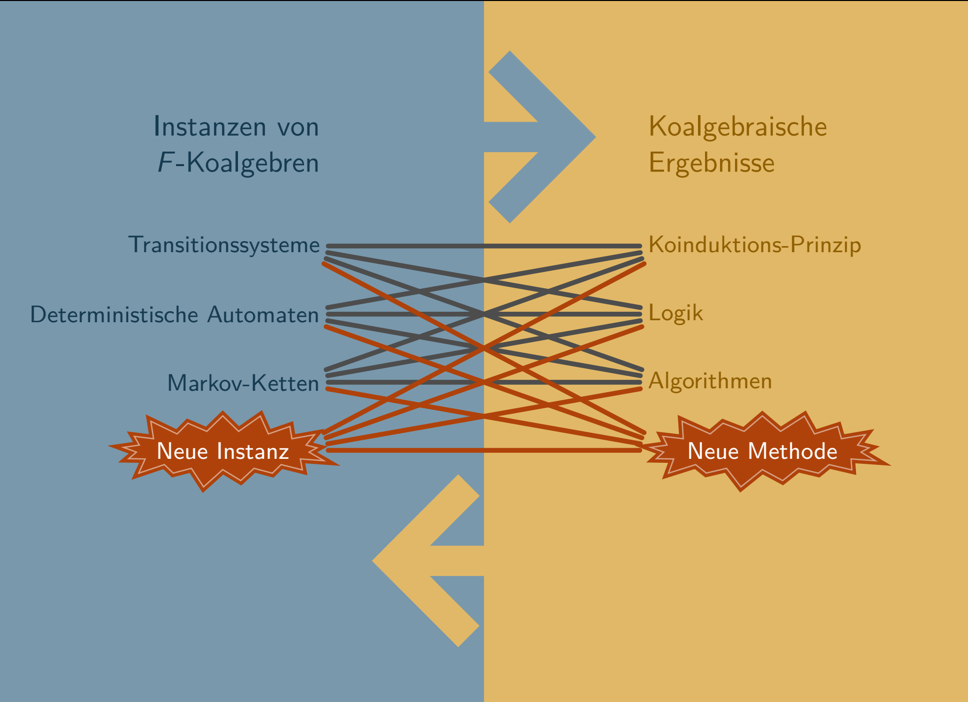
Markov-Ketten

Koinduktions-Prinzip

Logik

Algorithmen


Instanzen von
F-Koalgebren
Koalgebraische
Ergebnisse
Transitionssysteme
Deterministische Automaten
Markov-Ketten
Neue Instanz
Koinduktions-Prinzip
Logik
Algorithmen


Instanzen von
F-Koalgebren
Koalgebraische
Ergebnisse
Transitionssysteme
Deterministische Automaten
Markov-Ketten
Neue Instanz
Koinduktions-Prinzip
Logik
Algorithmen
Neue Methode

Koalgebren **in Mengen** **und darüber hinaus**

Semantik

Kapitel 2
Standard-Literatur

Kapitel 4
Conditional Transition Systems

Kapitel 3
Orbit-Endliche Verhalten

Minimierung

Kapitel 5
Erreichbarkeit

Kapitel 6
Verhaltensäquivalenz

Kapitel 7
Minimalitäts-begriff

Koalgebren	in Mengen	und darüber hinaus
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems
		Kapitel 3 Orbit-Endliche Verhalten
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit	*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff
	Kapitel 6 Verhaltensäquivalenz	

Versionen

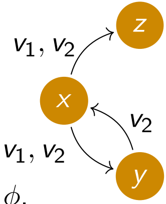
Definition für halbgeordnete Menge $(\Phi, \leq)$

- *Conditional Transition System*:

$$f\colon C \to \mathrm{Pos}\big((\Phi, \leq), (\mathcal{P}C, \supseteq)\big)$$

- *Conditional Bisimulation*:

Bisimulationen $(R_\phi)_{\phi \in \Phi}$, ..., monoton in ϕ.



[Beohar, König, Küpper, Silva, 2017]

Versionen

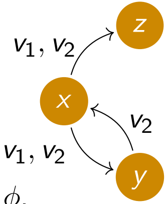
Definition für halbgeordnete Menge $(\Phi, \leq)$

- *Conditional Transition System*:

  $$f\colon C \to \mathrm{Pos}\big((\Phi, \leq), (\mathcal{P}C, \supseteq)\big)$$

- *Conditional Bisimulation*:

  Bisimulationen $(R_\phi)_{\phi \in \Phi}$, ..., monoton in ϕ.



[Beohar, König, Küpper, Silva, 2017]

Verallgemeinerte Definitionen für $F\colon \mathrm{Pos} \to \mathrm{Pos}$

- F hat *Versionsfilter* $|^{\phi}\colon FX \to FX$ (in $\mathcal{K}\ell((-)^{\Phi})$), wenn ....
- *Conditional Bisimulation* auf $c\colon C \to FC^{\Phi}$:

  Bisimulationen $(R_\phi)_{\phi \in \Phi}$, ... , monoton in ϕ

Versionen

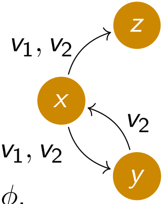
Definition für halbgeordnete Menge $(\Phi, \leq)$

- *Conditional Transition System*:

  $$f\colon C \to \mathrm{Pos}\big((\Phi, \leq), (\mathcal{P}C, \supseteq)\big)$$

- *Conditional Bisimulation*:

  Bisimulationen $(R_\phi)_{\phi \in \Phi}$, ..., monoton in ϕ.



[Beohar, König, Küpper, Silva, 2017]

Verallgemeinerte Definitionen für $F\colon \mathrm{Pos} \to \mathrm{Pos}$

- F hat *Versionsfilter* $|^{\phi}\colon FX \to FX$ (in $\mathcal{K}\ell((-)^{\Phi})$), wenn ....
- *Conditional Bisimulation* auf $c\colon C \to FC^{\Phi}$:

  Bisimulationen $(R_\phi)_{\phi \in \Phi}$, ... , monoton in ϕ

Neue Instanz

Theorem Für sog. Upgrade-erhaltende $c\colon C \to FC^{\Phi}$ gilt:

Conditional Bisimilarity $=$ Koalgebraische Verhaltensäquivalenz

Koalgebren	in Mengen	und darüber hinaus	
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems	
		Kapitel 3 Orbit-Endliche Verhalten	
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit		*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff
	Kapitel 6 Verhaltensäquivalenz		

Koalgebren	in Mengen	und darüber hinaus
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems
		Kapitel 3 Orbit-Endliche Verhalten
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit	*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff
	Kapitel 6 Verhaltensäquivalenz	

Kategorie der Nominellen Mengen

freie Variablen

(Variablen-)Namen

- Elemente halten *endlich viele* Atome von $\mathbb{A} = \{a_0, a_1, \ldots\}$
- Formalisiert Umbenennen, Allozieren, Binden von Namen:

$$\lambda x.x =_\alpha \lambda y.y \neq_\alpha \lambda x.y$$

Kategorie der Nominellen Mengen

freie Variablen (Variablen-)Namen

- Elemente halten *endlich viele* Atome von $\mathbb{A} = \{a_0, a_1, \ldots\}$
- Formalisiert Umbenennen, Allozieren, Binden von Namen:

$$\lambda x.x =_\alpha \lambda y.y \neq_\alpha \lambda x.y$$

Koalgebren

Automaten für unendliches Eingabealphabet $\mathbb{A}$ (z.B. $FX = 2 \times X^{\mathbb{A}}$)

Termbäume mit Bindung (z.B. $FX = \mathbb{A} + X \times X + [\mathbb{A}]X$)

λ-Bäume Bindungs-Funktor

Kategorie der Nominellen Mengen

freie Variablen (Variablen-)Namen

- Elemente halten *endlich viele* Atome von $\mathbb{A} = \{a_0, a_1, \ldots\}$
- Formalisiert Umbenennen, Allozieren, Binden von Namen:

$$\lambda x.x =_\alpha \lambda y.y \neq_\alpha \lambda x.y$$

Koalgebren

Automaten für unendliches Eingabealphabet $\mathbb{A}$ (z.B. $FX = 2 \times X^{\mathbb{A}}$)

Termbäume mit Bindung (z.B. $FX = \mathbb{A} + X \times X + [\mathbb{A}]X$)

λ-Bäume Bindungs-Funktor

Konstant

Theorem Für $F ::= N \mid F + F \mid F \times F \mid \mathcal{P}_\mathrm{f} \mid \mathbb{A} \mid [\mathbb{A}](-) \mid (-)^{\mathbb{A}}$:

Orbit-endliche F-Koalgebren	$=$	Quotient von endlichen F'-Koalgebren in Mengen (z.B. α-Äquivalenzklassen)

Neues Ergebnis

Kategorie der Nominellen Mengen

freie Variablen (Variablen-)Namen

- Elemente halten *endlich viele* Atome von $\mathbb{A} = \{a_0, a_1, \dots\}$
- Formalisiert Umbenennen, Allozieren, Binden von Namen:

$$\lambda x.x =_\alpha \lambda y.y \neq_\alpha \lambda x.y$$

Koalgebren

Automaten für unendliches Eingabealphabet $\mathbb{A}$ (z.B. $FX = 2 \times X^{\mathbb{A}}$)

Termbäume mit Bindung (z.B. $FX = \mathbb{A} + X \times X + [\mathbb{A}]X$)

λ-Bäume Bindungs-Funktor

Konstant

Theorem Für $F ::= N \mid F + F \mid F \times F \mid \mathcal{P}_f \mid \mathbb{A} \mid [\mathbb{A}](-) \mid (-)^{\mathbb{A}}$:

Orbit-endliche F-Koalgebren $=$ Quotient von endlichen F'-Koalgebren in Mengen (z.B. α-Äquivalenzklassen)

Neues Ergebnis

Orbit-endliche Verhalten (Rationaler Fixpunkt) ⟷ Nominelle Mengen (Endlicher Support) ⟷ Unendliche Verhalten (Finale Koalgebra)

Koalgebren	in Mengen	und darüber hinaus	
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems	
		Kapitel 3 Orbit-Endliche Verhalten	
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit		*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff
	Kapitel 6 Verhaltensäquivalenz		

Koalgebren	in Mengen	und darüber hinaus
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems
		Kapitel 3 Orbit-Endliche Verhalten
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit	*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff
	Kapitel 6 Verhaltensäquivalenz	

Minimieren

Reduzieren der Zustände
bei gleicher Semantik

Minimieren
Reduzieren der Zustände
bei gleicher Semantik

Erreichbarkeit
Unerreichbare
Zustände
Entfernen

Minimieren
Reduzieren der Zustände
bei gleicher Semantik

Erreichbarkeit
Unerreichbare
Zustände
Entfernen

Verhaltensäquivalenz
Zustände
gleichen Verhaltens
Verschmelzen

Minimieren
Reduzieren der Zustände
bei gleicher Semantik

Erreichbarkeit
Unerreichbare
Zustände
Entfernen

dual

Verhaltensäquivalenz
Zustände
gleichen Verhaltens
Verschmelzen

Minimieren
Reduzieren der Zustände
bei gleicher Semantik

Erreichbarkeit
Unerreichbare
Zustände
Entfernen

dual

Verhaltensäquivalenz
Zustände
gleichen Verhaltens
Verschmelzen

$\Downarrow$

Kategorielle Gemeinsamkeiten
Eindeutigkeit, Existenz

Aber: Algorithmisch verschieden!

Koalgebren	**in Mengen**	**und darüber hinaus**
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems
		Kapitel 3 Orbit-Endliche Verhalten
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit	*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff
	Kapitel 6 Verhaltensäquivalenz	

Koalgebren	in Mengen	und darüber hinaus
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems
		Kapitel 3 Orbit-Endliche Verhalten
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit	*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff
	Kapitel 6 Verhaltensäquivalenz	

Punktierte Unterkoalgebra
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x_0"] \arrow[dr, "x_0'"'] & C \arrow[r, "c"] & FC \\ & C' \arrow[u, tail, "h"] \arrow[r, "c'"] & FC' \arrow[u, "Fh"] \end{tikzcd}$$
von (C, f, x_0)

Definition Erreichbarer Teil von (C, f, x_0) = Kleinste punktierte Unterkoalgebra

Punktierte Unterkoalgebra

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x_0"] \arrow[dr, "x_0'"'] & C \arrow[r, "c"] & FC \\ & C' \arrow[u, tail, "h"] \arrow[r, "c'"] & FC' \arrow[u, "Fh"'] \end{tikzcd}$$

von (C, f, x_0)

Definition Erreichbarer Teil von (C, f, x_0) = Kleinste punktierte Unterkoalgebra

schwache Bedingung

Theorem Wenn F unendliche Schnitte erhält und die Kategorie ein Faktorisierungssystem hat:

- Iterative Konstruktion (höchstens abzählbar viele Schritte).
- Konstruktion ist funktoriell, wenn F Urbilder erhält.

Methode

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x_0"] \arrow[dr, "x_0'"'] & C \arrow[r, "c"] & FC \\ & C' \arrow[u, tail, "h"] \arrow[r, "c'"] & FC' \arrow[u, "Fh"'] \end{tikzcd}$$

Punktierte Unterkoalgebra von (C, f, x_0)

Definition Erreichbarer Teil von (C, f, x_0) $=$ Kleinste punktierte Unterkoalgebra

schwache Bedingung

Theorem Wenn F unendliche Schnitte erhält und die Kategorie ein Faktorisierungssystem hat:

- Iterative Konstruktion (höchstens abzählbar viele Schritte).
- Konstruktion ist funktoriell, wenn F Urbilder erhält.

Methode

In Mengen: Breitensuche auf kanonischem Graph.

Reduktion

In Kleisli-Kategorien: Annahmen manchmal erfüllt.

Koalgebren	**in Mengen**	**und darüber hinaus**
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems *Kapitel 3* Orbit-Endliche Verhalten
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit *Kapitel 6* Verhaltensäquivalenz	*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff

Koalgebren	**in Mengen**	**und darüber hinaus**
Semantik	*Kapitel 2* Standard-Literatur	*Kapitel 4* Conditional Transition Systems *Kapitel 3* Orbit-Endliche Verhalten
Minimierung	*Kapitel 5* Erreichbarkeit *Kapitel 6* Verhaltensäquivalenz	*Kapitel 7* Minimalitäts-begriff

Verhaltensäquivalenz

Gegeben:

$$c\colon C \to FC$$

Gesucht: kleinster Quotient (D, d) $\not\twoheadrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "c"] \arrow[d, two heads, "q"'] & FC \arrow[d, "Fq"] \\
D \arrow[r, "d"] & FD
\end{tikzcd}$$

Ähnlicher Ablauf

Ähnliche Laufzeit

System-Typ fest-verdrahtet

Ähnlicher Ablauf

Ähnliche Laufzeit

System-Typ fest-verdrahtet

Deterministische endl. Automaten

$n \cdot \log n$	$\lvert A\rvert \cdot n \cdot \log n$
Hopcroft '71	Gries '73
	Knuutila '01

Ähnlicher Ablauf

Ähnliche Laufzeit

System-Typ fest-verdrahtet

Deterministische endl. Automaten

$n \cdot \log n$ — Hopcroft '71

$|A| \cdot n \cdot \log n$ — Gries '73, Knuutila '01

(Gelabelte) Transitions-Systeme

$m \cdot \log n$ — Paige, Tarjan '87, Valmari '09

Ähnlicher Ablauf

Ähnliche Laufzeit

System-Typ fest-verdrahtet

Deterministische endl. Automaten

$n \cdot \log n$ Hopcroft '71

$|A| \cdot n \cdot \log n$ Gries '73, Knuutila '01

(Gelabelte) Transitions-Systeme

$m \cdot \log n$

Paige, Tarjan '87

Valmari '09

Gewichtete Systeme
"Markov Chain Lumping"

$m \cdot \log n$

Valmari, Franceschinis '10

Ähnlicher Ablauf

Ähnliche Laufzeit

System-Typ fest-verdrahtet

Deterministische endl. Automaten

$n \cdot \log n$ Hopcroft '71

$|A| \cdot n \cdot \log n$ Gries '73, Knuutila '01

(Gelabelte) Transitions-Systeme

$m \cdot \log n$

Paige, Tarjan '87

Valmari '09

Segala-Systeme

$m_{\text{dist}} \cdot \log m_{\text{acts}}$

Groote, Verduzco, de Vink '18

Gewichtete Systeme
"Markov Chain Lumping"

$m \cdot \log n$

Valmari, Franceschinis '10

Ähnlicher Ablauf

Ähnliche Laufzeit

System-Typ fest-verdrahtet

Deterministische endl. Automaten

$n \cdot \log n$ — Hopcroft '71

$|A| \cdot n \cdot \log n$ — Gries '73, Knuutila '01

(Gelabelte) Transitions-Systeme

$m \cdot \log n$

Paige, Tarjan '87

Valmari '09

Segala-Systeme

$m_{\text{dist}} \cdot \log m_{\text{acts}}$

Groote, Verduzco, de Vink '18

Gewichtete Systeme "Markov Chain Lumping"

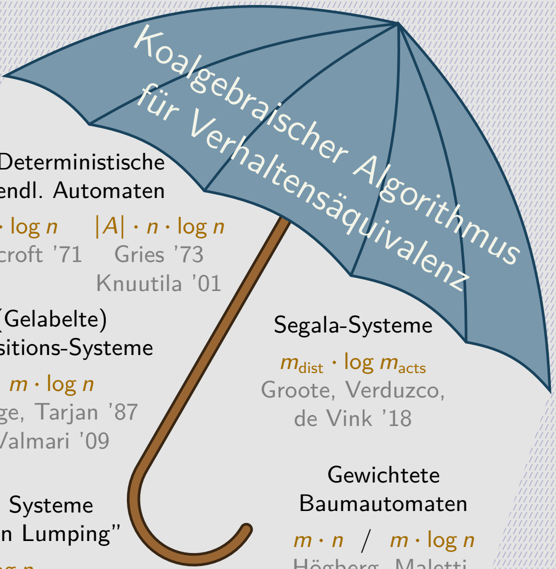
$m \cdot \log n$

Valmari, Franceschinis '10

Gewichtete Baumautomaten

$m \cdot n$ / $m \cdot \log n$

Högberg, Maletti, May '07



Deterministische
endl. Automaten

$n \cdot \log n$ — Hopcroft '71

$|A| \cdot n \cdot \log n$ — Gries '73, Knuutila '01

(Gelabelte)
Transitions-Systeme

$m \cdot \log n$

Paige, Tarjan '87
Valmari '09

Gewichtete Systeme
"Markov Chain Lumping"

$m \cdot \log n$

Valmari, Franceschinis '10

Segala-Systeme

$m_{\text{dist}} \cdot \log m_{\text{acts}}$

Groote, Verduzco,
de Vink '18

Gewichtete
Baumautomaten

$m \cdot n$ / $m \cdot \log n$

Högberg, Maletti,
May '07

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Partitionen: $P_i \leq Q_i$ auf C, werden schrittweise verfeinert

Heuristik: Welche Information wird als Nächstes weiterverarbeitet?

- Alles gleichzeitig $\Longrightarrow$ $Q_{i+1} = P_i$
  „Final Chain Algorithmus" [König, Küpper '14]
- „Smaller half" $\Longrightarrow$ $S \in C/P_i \quad B \in C/Q_i \quad S \subseteq B$ mit

$$|S| \leq \tfrac{1}{2} \cdot |B|$$

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Optimierung für Koalgebren in Set:
Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Optimierung für Koalgebren in Set:
Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Wenn F zippable, d.h. wenn

$$F(A+B) \longrightarrow F(A+1) \times F(1+B) \quad \text{injektiv}$$

dann: $Q_{i+1} = Q_i \cap \ker \chi_S^B \qquad P_{i+1} = P_i \cap \ker(\chi_S^B \cdot c)$

(zippable nicht abgeschlossen unter: Komposition, Quotient)

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Optimierung für Koalgebren in Set:
Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Neue Methode

- Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem
- Optimierung für Koalgebren in Set: Inkrementelle Berechnung der Partitionen
- Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt, Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

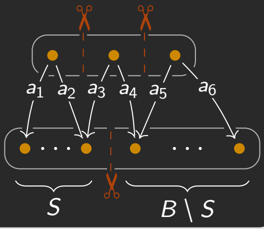
Optimierung für Koalgebren in Set: Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt, Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches

Encoding: $\flat\colon FX \to \mathcal{B}(A \times X)$

Refinement-Interface für F:
init: $F1 \to \mathcal{B}A \to W$
update: $\mathcal{B}A \times W \to W \times F3 \times W$

Korrektheit: $w\colon \mathcal{P}X \to (FX \to W)$



Neue Methode

- Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem
- Optimierung für Koalgebren in Set: Inkrementelle Berechnung der Partitionen
- Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt, Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Optimierung für Koalgebren in Set:
Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt,
Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches

Laufzeitanalyse: $\mathcal{O}(\overset{\text{Kanten}}{m} \cdot \log \overset{\text{Zustände}}{n})$ für $F \in \{\mathcal{P}_\mathsf{f}, M^{(-)}, \mathbb{R}^{(-)}, \mathcal{B}, \Sigma\}$

Neue Methode

- Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem
- Optimierung für Koalgebren in Set: Inkrementelle Berechnung der Partitionen
- Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt, Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches
- Laufzeitanalyse: $\mathcal{O}(\overset{\text{Kanten}}{m} \cdot \log \overset{\text{Zustände}}{n})$ für $F \in \{\mathcal{P}_\mathsf{f}, M^{(-)}, \mathbb{R}^{(-)}, \mathcal{B}, \Sigma\}$

Laufzeit: $\mathcal{O}((m+n)\cdot \log n \cdot p(C,c))$

Fast immer: $m \geq n$

Laufzeit-Parameter $p(C,c)$ des Refinement Interfaces:

$p(C,c) = \log\min(\lvert M\rvert, m)$	für $M^{(-)}$ wenn M nicht kürzbar
$p(C,c) = \max_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{ar}(\sigma)$	für Polynomialfunktor Σ
$p(C,c) = 1$	sonst

Neu

Systemtyp	Funktor FX	Laufzeit $(m \geq n)$		Maßgeschneiderter Algorithmus	
Transitions-Systeme	$\mathcal{P}_\mathrm{f}X$	$m \cdot \log n$	=	$m \cdot \log n$	Paige, Tarjan 1987
Markov-Ketten	$\mathbb{R}^{(X)}$	$m \cdot \log n$	=	$m \cdot \log n$	Valmari, Franceschinis 2010
Determi-nistische Automaten	$2 \times X^A$ (A fest)	$n \cdot \log n$	=	$n \cdot \log n$	Hopcroft 1971
Colour Refinement	$\mathcal{B}X = \mathbb{N}^{(X)}$	$m \cdot \log n$	=	$m \cdot \log n$	Berkholz, Bonsma, Grohe 2017

- Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem
- Optimierung für Koalgebren in Set:
  Inkrementelle Berechnung der Partitionen
- Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt,
  Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches
- Laufzeitanalyse: $\mathcal{O}(\underbrace{m}_{\text{Kanten}} \cdot \log \underbrace{n}_{\text{Zustände}})$ für $F \in \{\mathcal{P}_\mathrm{f}, M^{(-)}, \mathbb{R}^{(-)}, \mathcal{B}, \Sigma\}$

Laufzeit: $\mathcal{O}((m+n) \cdot \log n \cdot p(C, c))$
Fast immer: $m \geq n$

Laufzeit-Parameter $p(C, c)$ des Refinement Interfaces:

$p(C, c) = \log \min(\lvert M\rvert, m)$	für $M^{(-)}$ wenn M nicht kürzbar
$p(C, c) = \max_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{ar}(\sigma)$	für Polynomialfunktor Σ
$p(C, c) = 1$	sonst

Neu

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Optimierung für Koalgebren in Set:
Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt,
Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches

Laufzeitanalyse: $\mathcal{O}(\underbrace{m}_{\text{Kanten}} \cdot \log \underbrace{n}_{\text{Zustände}})$ für $F \in \{\mathcal{P}_\mathsf{f}, M^{(-)}, \mathbb{R}^{(-)}, \mathcal{B}, \Sigma\}$

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Optimierung für Koalgebren in Set:
Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt,
Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches

Laufzeitanalyse: $\mathcal{O}(\overset{\text{Kanten}}{m} \cdot \log \overset{\text{Zustände}}{n})$ für $F \in \{\mathcal{P}_\mathsf{f}, M^{(-)}, \mathbb{R}^{(-)}, \mathcal{B}, \Sigma\}$

Modularität: Kombination der Funktoren via: $+$, $\times$, $\circ$

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Optimierung für Koalgebren in Set: Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt, Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches

Laufzeitanalyse: $\mathcal{O}(\underbrace{m}_{\text{Kanten}} \cdot \log \underbrace{n}_{\text{Zustände}})$ für $F \in \{\mathcal{P}_\mathsf{f}, M^{(-)}, \mathbb{R}^{(-)}, \mathcal{B}, \Sigma\}$

Modularität: Kombination der Funktoren via: $+$, $\times$, $\circ$

Vorverarbeitung durch Erzeugen von Zwischenzuständen:

$$(F \circ G)\text{-Koalgebren} \rightsquigarrow (F + G)\text{-Koalgebren}$$

Konstruktion in extensiver Kategorie

Neue Methode

Systemtyp	Funktor FX	Laufzeit $(m \geq n)$		Maßgeschneiderter Algorithmus	
Transitions-Systeme	$\mathcal{P}_{\mathrm{f}}X$	$m \cdot \log n$	=	$m \cdot \log n$	Paige, Tarjan 1987
Markov-Ketten	$\mathbb{R}^{(X)}$	$m \cdot \log n$	=	$m \cdot \log n$	Valmari, Franceschinis 2010
Determi-nistische Automaten	$2 \times X^A$ (A fest)	$n \cdot \log n$	=	$n \cdot \log n$	Hopcroft 1971
Colour Refinement	$\mathcal{B}X = \mathbb{N}^{(X)}$	$m \cdot \log n$	=	$m \cdot \log n$	Berkholz, Bonsma, Grohe 2017

Systemtyp	Funktor FX	Laufzeit $(m \geq n)$		Maßgeschneiderter Algorithmus	
Transitions-Systeme	$\mathcal{P}_\mathrm{f}X$	$m \cdot \log n$	$=$	$m \cdot \log n$	Paige, Tarjan 1987
LTS	$\mathcal{P}_\mathrm{f}(\mathbb{N} \times X)$	$m \cdot \log m$	$=$	$m \cdot \log m$	Dovier, Piazza, Policriti 2004
			$>$	$m \cdot \log n$	Valmari 2009
Markov-Ketten	$\mathbb{R}^{(X)}$	$m \cdot \log n$	$=$	$m \cdot \log n$	Valmari, Franceschinis 2010
Determi-nistische Automaten	$2 \times X^A$ (A fest)	$n \cdot \log n$	$=$	$n \cdot \log n$	Hopcroft 1971
	$2 \times \mathcal{P}_\mathrm{f}(A \times X)$	$\lvert A\rvert \cdot n \cdot \log n$	$=$	$\lvert A\rvert \cdot n \cdot \log n$	Gries 1973/Knuutila 2001
Segala Systeme	$\mathcal{P}_\mathrm{f}(A \times \mathcal{D}X)$	$m_\mathcal{D} \cdot \log m_{\mathcal{P}_\mathrm{f}}$	$<$	$m \cdot \log n$	Baier, Engelen, Majster-Cederbaum 2000
			$=$	$m_\mathcal{D} \cdot \log m_{\mathcal{P}_\mathrm{f}}$	Groote, Verduzco, de Vink 2018
Colour Refinement	$\mathcal{B}X = \mathbb{N}^{(X)}$	$m \cdot \log n$	$=$	$m \cdot \log n$	Berkholz, Bonsma, Grohe 2017
Gewichtete Baum-Automaten (Backwards Bisimulation)	Neu $M^{(\Sigma X)}$ M nicht kürzbar	$m \cdot \log^2 m$	$<$	$m \cdot n$	Högberg, Maletti, May 2007
	$M^{(\Sigma X)}$ M kürzbar	$m \cdot \log m$	$=$ Σ fest	$m \cdot \log n$	Högberg, Maletti, May 2007

- Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem
- Optimierung für Koalgebren in Set: Inkrementelle Berechnung der Partitionen
- Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt, Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches
- Laufzeitanalyse: $\mathcal{O}(\underbrace{m}_{\text{Kanten}} \cdot \log \underbrace{n}_{\text{Zustände}})$ für $F \in \{\mathcal{P}_\mathsf{f}, M^{(-)}, \mathbb{R}^{(-)}, \mathcal{B}, \Sigma\}$
- Modularität: Kombination der Funktoren via: $+$, $\times$, $\circ$

Vorverarbeitung durch Erzeugen von Zwischenzuständen:

$$(F \circ G)\text{-Koalgebren} \rightsquigarrow (F + G)\text{-Koalgebren}$$

Konstruktion in extensiver Kategorie

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Optimierung für Koalgebren in Set:
Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt,
Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches

Laufzeitanalyse: $\mathcal{O}(\underbrace{m}_{\text{Kanten}} \cdot \log \underbrace{n}_{\text{Zustände}})$ für $F \in \{\mathcal{P}_\mathsf{f}, M^{(-)}, \mathbb{R}^{(-)}, \mathcal{B}, \Sigma\}$

Modularität: Kombination der Funktoren via: $+$, $\times$, $\circ$

Neue Methode

Konstruktion des kleinsten Quotienten von $c\colon C \to FC$ in Kategorie mit (RegEpi,Mono)-Faktorisierungssystem

Optimierung für Koalgebren in Set:
Inkrementelle Berechnung der Partitionen

Pseudocode für Verfeinerungs-Schritt,
Refinement-Interface für Funktor-Spezifisches

Laufzeitanalyse: $\mathcal{O}(\underbrace{m}_{\text{Kanten}} \cdot \log \underbrace{n}_{\text{Zustände}})$ für $F \in \{\mathcal{P}_\mathrm{f}, M^{(-)}, \mathbb{R}^{(-)}, \mathcal{B}, \Sigma\}$

Modularität: Kombination der Funktoren via: $+$, $\times$, $\circ$

Implementierung: CoPaR

$\left.\begin{array}{c}\text{Kombinierter Set-Funktor } F\\ F\text{-Koalgebra}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ Verhaltensäquivalenz

Neue Methode

Neue Instanzen

Conditional Transition Systems

Gewichtete Baum-Automaten

Weitere?

Neue Methoden

Erreichbarkeit: Konstruktion & Reduktion

Verhaltensäquivalenz: Generischer & Modularer $m \cdot \log n$ Algorithmus für Partition Refinement

Weitere?

Neue Ergebnisse

Gemeinsamkeiten zwischen Minimierungs-aspekten

Orbit-endliche Koalgebren in Nominellen Mengen

Weitere?

Christoph Berkholz, Paul S. Bonsma, Martin Grohe. "Tight Lower and Upper Bounds for the Complexity of Canonical Colour Refinement". In: *Theory Comput. Syst.* 60.4 (2017), S. 581–614. DOI: 10.1007/s00224-016-9686-0. URL: https://doi.org/10.1007/s00224-016-9686-0.

Christel Baier, Bettina Engelen, Mila Majster-Cederbaum. "Deciding Bisimilarity and Similarity for Probabilistic Processes". In: *J. Comput. Syst. Sci.* 60 (2000), S. 187–231.

Harsh Beohar, Barbara König, Sebastian Küpper, Alexandra Silva. "Conditional Transition Systems with Upgrades". In: *11th International Symposium on Theoretical Aspects of Software Engineering (TASE 2017)* (2017). Full version available at https://arxiv.org/abs/1706.02526.

Harsh Beohar, Barbara König, Sebastian Küpper, Alexandra Silva, Thorsten Wißmann. "A coalgebraic treatment of conditional transition systems with upgrades". In: *Logical Methods in Computer Science* Volume 14, Issue 1 (Feb. 2018). DOI: 10.23638/LMCS-14(1:19)2018. URL: https://lmcs.episciences.org/4330/pdf.

Ulrich Dorsch, Stefan Milius, Lutz Schröder, Thorsten Wißmann. "Efficient Coalgebraic Partition Refinement". In: *Proc. 28th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR 2017)*. LIPIcs. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017. DOI: 10.4230/LIPIcs.CONCUR.2017.32. URL: https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2017/7793/.

Agostino Dovier, Carla Piazza, Alberto Policriti. “An efficient algorithm for computing bisimulation equivalence”. In: *Theor. Comput. Sci.* 311.1-3 (2004), S. 221–256.

David Gries. “Describing an algorithm by Hopcroft”. In: *Acta Informatica* 2 (1973), S. 97–109. ISSN: 1432-0525.

Jan Friso Groote, Jao Rivera Verduzco, Erik P. de Vink. “An Efficient Algorithm to Determine Probabilistic Bisimulation”. In: *Algorithms* 11.9 (2018), S. 131. DOI: 10.3390/a11090131. URL: https://doi.org/10.3390/a11090131.

Johanna Högberg, Andreas Maletti, Jonathan May. “Bisimulation Minimisation for Weighted Tree Automata”. In: *Developments in Language Theory, DLT 2007*. Bd. 4588. LNCS. Springer, 2007, S. 229–241. ISBN: 978-3-540-73207-5. DOI: 10.1007/978-3-540-73208-2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-73208-2.

John Hopcroft. “An $n \log n$ algorithm for minimizing states in a finite automaton”. In: *Theory of Machines and Computations*. Academic Press, 1971, S. 189–196.

Barbara König, Sebastian Küpper. “Generic Partition Refinement Algorithms for Coalgebras and an Instantiation to Weighted Automata”. In: *Theoretical Computer Science, IFIP TCS 2014*. Bd. 8705. LNCS. Springer, 2014, S. 311–325. ISBN: 978-3-662-44601-0.

Timo Knuutila. “Re-describing an algorithm by Hopcroft”. In: *Theor. Comput. Sci.* 250 (2001), S. 333–363. ISSN: 0304-3975.

Robert Paige, Robert E. Tarjan. “Three partition refinement algorithms”. In: *SIAM J. Comput.* 16.6 (1987), S. 973–989.

Antti Valmari. “Bisimilarity Minimization in $\mathcal{O}(m \log n)$ Time”. In: *Applications and Theory of Petri Nets, PETRI NETS 2009*. Bd. 5606. LNCS. Springer, 2009, S. 123–142. ISBN: 978-3-642-02423-8.

Antti Valmari, Giuliana Franceschinis. “Simple $\mathcal{O}(m \log n)$ Time Markov Chain Lumping”. In: *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems, TACAS 2010*. Bd. 6015. LNCS. Springer, 2010, S. 38–52.

Thorsten Wißmann, Ulrich Dorsch, Stefan Milius, Lutz Schröder. “Efficient and Modular Coalgebraic Partition Refinement”. In: *Logical Methods in Computer Science* Volume 16, Issue 1 (Jan. 2020). DOI: 10.23638/LMCS-16(1:8)2020. URL: https://lmcs.episciences.org/6064.

Thorsten Wißmann, Stefan Milius, Shin-ya Katsumata, Jérémy Dubut. “A Coalgebraic View on Reachability”. In: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 60, 4 (Dez. 2019), S. 605–638.