

# GLoIn Zusammenfassung

Verfasst vom FSI-Forum Nutzer `pos1ende`  
In L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X gesetzt von `pkal`

Letzte inhaltliche Änderungen: April 2019,  
zuletzt aktualisiert: Februar 2023,  
zuletzt gesetzt: 16. September 2024.

**Atome**  $A, B, C, \dots \in \mathcal{A}$  Nicht weiter zerlegbare Aussage. Kann wahr ( $\top$ ) oder falsch ( $\perp$ ) annehmen. Bsp.: “esRegnet”

**Wahrheitsbelegungen**  $\kappa : \mathcal{A} \rightarrow \{\top, \perp\}$   
Eine Abbildung, d.h.  $\kappa$  ordnet Atomen konkrete Wahrheitswerte zu.

**Prädikate**  $P, Q, R, \dots$  Bsp.:  $\text{istKleiner}(x, y)$ . Ein Prädikat macht eine Aussage über Individuen (hier  $x$  und  $y$ ) und gibt einen Wahrheitswert zurück, wenn es ausgewertet wird. 0-stellige Prädikate sind Konstanten.

**Funktionen**  $f, g, h, \dots$  z.B.  $\text{mutter}(x)$  gibt ein Objekt / ein Individuum zurück (hier interpretiert als die Mutter von  $x$ ). Nullstellige Funktionen sind Konstanten.

**Terme**  $D, E, F, \dots$  Ein Term ist eine Instanz der Grammatik:

$$T ::= x \mid c \mid f(T, \dots, T)$$

wo  $x$  eine Variable,  $c$  eine Konstante und  $f$  eine Funktion ist. Ergebnis der Auswertung eines Terms ist ein Objekt/Individuum.

**Formeln**  $\phi, \psi, \dots$  Eine Formel ist eine Instanz der Grammatik:

$$\begin{aligned} \phi, \psi &::= P(t_1, \dots, t_n) \mid \neg \phi \mid \\ &\phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \rightarrow \psi \mid \\ &\forall x(\phi) \mid \exists x(\phi) \end{aligned}$$

wo  $t$  ein Term, und  $x$  eine Variable ist.

Ergebnis der Auswertung einer Formel mittels einer Wahrheitsbelegung ist ein Wahrheitswert.

**Negationsnormalform (NNF)** Formel in NNF, wenn  $\neg$  nur vor Atomen vorkommt. Aus jeder Formel kann mit diesen Schritten eine Formel in NNF erzeugt werden:

1. Negationen aufheben:  $\neg \neg \phi \rightarrow \phi$
2. *De Morgan* anwenden:  
 $\neg(\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg \phi \vee \neg \psi$   
 $\neg(\phi \vee \psi) \rightarrow \neg \phi \wedge \neg \psi$
3. Negationen auflösen  $\neg \top \rightarrow \perp, \neg \perp \rightarrow \top$

**Konjunktive Normalform (CNF)**  
Formel der Form  $(A \vee B \vee \dots \vee C) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B)$ .

Jede Formel hat eine CNF, und kann aus NNF erzeugt werden:

1.  $\text{CNF}(\phi \wedge \psi) = \text{CNF}(\phi) \wedge \text{CNF}(\psi)$
2.  $\text{CNF}((\phi \wedge \psi) \vee \lambda) = \text{CNF}(\phi) \wedge \text{CNF}(\psi) \vee \text{CNF}(\lambda)$
3.  $\text{CNF}(\phi) = \phi$ , wenn  $\phi$  kein “ $\wedge$ ” enthält.

**Disjunktive Normalform (DNF)**  
Inverse Normalform der KNF. Erzeugung:

1.  $\text{DNF}(\phi \vee \psi) = \text{CNF}(\phi) \vee \text{CNF}(\psi)$
2.  $\text{DNF}((\phi \vee \psi) \wedge \lambda) = \text{DNF}(\phi \wedge \lambda) \vee \text{DNF}(\psi \wedge \lambda)$
3.  $\text{DNF}(\phi) = \phi$ , wenn  $\phi$  kein “ $\vee$ ” enthält.

**Einige Äquivalenzen**

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B \equiv \neg B \rightarrow \neg A \\ A \iff B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\ \neg \forall y(\phi) &\equiv \exists y(\neg \phi) \\ \neg \exists y(\phi) &\equiv \forall y(\neg \phi) \end{aligned}$$

**Freie Variablen (FV)** sind Menge an Variablen einer Formel, die durch keinen Quantor gebunden sind.

**Substitution**

$$\begin{aligned} \sigma &= [E_1/x_1, \dots, E_n/x_n] \\ \text{ersetzt jeweils alle Variablen } x_i &\text{ durch den Term } E_n. \text{ Es berechnet sich durch:} \\ x\sigma &= \sigma(x) \\ f(E_1, \dots, E_n)\sigma &\implies f(E_1\sigma, \dots, E_n\sigma) \\ P(E_1, \dots, E_n)\sigma &\implies P(E_1\sigma, \dots, E_n\sigma) \\ (E = D)\sigma &\implies E\sigma = D\sigma \\ (\neg \phi)\sigma &\implies \neg(\phi\sigma) \\ (\phi \wedge \psi)\sigma &\implies (\phi\sigma \wedge \psi\sigma) \end{aligned}$$

$$(\phi \vee \psi)\sigma \implies (\phi\sigma \vee \psi\sigma)$$

$$(\forall x(\phi))\sigma \implies \forall x(\phi\sigma')$$

$$(\exists x(\phi))\sigma \implies \exists x(\phi\sigma')$$

Wobei  $\sigma'(x) = y$ , für alle anderen  $z \neq x$  bleibt  $\sigma'(z) = \sigma(z)$ . Wähle  $y$  so, dass  $y \notin \text{FV}(\sigma(z))$  für alle  $z \in \text{FV}(\forall x(\phi))$  bzw.  $\exists x(\phi)$ .

**Weitere Normalformen**

**Pränexe Normalform (PNF)** Alle Quantoren  $Q_n \in \{\forall, \exists\}$  stehen am Anfang der Formel:  $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n (\phi)$ . Wird erzeugt durch wiederholtes anwenden von

$$\begin{aligned} \phi \wedge \exists x(\psi) &\equiv \exists x(\phi \wedge \psi) \\ \phi \vee \exists x(\psi) &\equiv \exists x(\phi \vee \psi) \\ \phi \wedge \forall x(\psi) &\equiv \forall x(\phi \wedge \psi) \\ \phi \vee \forall x(\psi) &\equiv \forall x(\phi \vee \psi) \end{aligned}$$

Nur falls  $x \notin \text{FV}(\phi)$ . Dies kann durch Umbenennung erreicht werden: Wende  $[\tilde{x}/x]$  auf den Quantifizierten Teil an. Bspw.:

$$\phi \vee \exists x(\psi) \rightarrow \exists \phi \vee \tilde{x}(\psi[\tilde{x}/x])$$

**Skolemform** ist PNF ohne Existenzquantoren. Nicht zu jeder Formel existiert eine Skolemform. Allerdings lässt sich zu jeder Formel eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Skolemform berechnen.

$\phi$  und  $\psi$  erfüllbarkeitsäquivalent gdw. ( $\phi$  erfüllbar  $\iff \psi$  erfüllbar). Diese zu finden, für  $\phi[c/x]$  ( $c$  frisch) erfüllbar heißt Skolemisierung (aus PNF):

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y(\phi)$$

$$\implies \forall x_1 \dots \forall x_n (\phi[f_y(x_1, \dots, x_n)/y])$$

erschöpfend anwenden.

Dabei für jedes  $y$  eine neue Skolem-Funktion  $f_y$  einführen. Diese hat als Parameter alle  $\forall$ -Quantifizierten Variablen links vom zu eliminierenden “ $\exists$ ” (also **nicht** die  $\exists$ -Quantifizierten). Falls keine “ $\forall$ ”s vor dem zu eliminierenden “ $\exists$ ” stehen, ist  $f_y$  von einer nullstelligen Funktion: *Skolem-Konstante*.

**Klauselform** Sei  $\Psi = \forall x_1 \dots \forall x_n (\phi)$  in Skolemform. Wenn  $\psi$  in CNF gebracht wird, können alle “ $\forall$ ” implizit angenommen werden, und  $\psi$  als Klauselmengungeschrieben werden.

**Unifikation** Gleichungssystem

$$S = \{E_1 \doteq E_2, E_3 \doteq E_4, \dots\},$$

wobei  $E_i$  Terme sind.  $S$  ist gelöst, falls

1. jede Gleichung die Form  $v \doteq E$  hat, wobei  $v$  eine Variable und  $E$  ein Term ist.
2. jedes solche  $v$  max. 1 mal auf einer linken Seite steht (nochmal in rechter Seite ist okay).

Mit Unifikationsalgorithmus auf Unifizierbarkeit prüfbar:

**(delete)**

$$S \cup \{x \doteq x\} \implies S$$

**(decomp)**

$$\begin{aligned} S \cup \{f(E_1, \dots, E_n) \doteq f(D_1, \dots, D_n)\} \\ \implies S \cup \{E_1 \doteq D_1, \dots, E_n \doteq D_n\} \end{aligned}$$

**(conflict)** für  $f \neq g$

$$S \cup \{f(E_1, \dots, E_n) \doteq g(D_1, \dots, D_n)\} \implies \perp$$

**(orient)** für  $E$ , keine Variable

$$S \cup \{E \doteq x\} \implies S \cup \{x \doteq E\}$$

**(occurs)** für  $x \in \text{FV}(E), x \neq E$

$$S \cup \{x \doteq E\} \implies \perp$$

**(elim)** für  $x \notin \text{FV}(E), x \in \text{FV}(S)$

$$S \cup \{x \doteq E\} \implies S[E/x] \cup \{x \doteq E\}$$

Falls  $\perp$  erreicht wird, ist das System nicht *unifizierbar*, ansonsten kann unifizierendes MGU aus  $x_i \doteq E_i$  abgelesen werden.

**Resolution in FOL** Mit  $\Phi$  in Klauselform kann Halbentscheidungsverfahren (Rekursiv Auszählbar, terminiert nicht wenn  $\Phi$  erfüllbar) für *Unerfüllbarkeit* von  $\Phi$  ausgeführt werden:

$$\text{(RIF)} \frac{C_1, A_1, \dots, A_n \quad C_2, \neg B}{C_1\sigma, C_2\sigma}$$

$$\sigma = \text{mgu}(A_1 \doteq B, \dots, A_n \doteq B)$$

Wende RIF so lange an, bis  $\square$  erreicht oder RIF nicht mehr anwendbar.

**Fitch/natürliche Deduktion**  $A, B$  seien Terme,  $\Phi, \Psi$  Formeln und  $c$  ein konkretes Subjekt. Die Regeln sind:

**Konjunktion**

$$(\wedge I) \frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}, \quad (\wedge E_1) \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}, \quad (\wedge E_2) \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$$

**Disjunktion**

$$(\vee I_1) \frac{\phi}{\phi \vee \psi}, \quad (\vee I_2) \frac{\psi}{\phi \wedge \psi}, \quad (\vee E) \frac{\begin{array}{c} \phi \quad \psi \\ \vdots \\ \chi \quad \chi \end{array}}{\chi}$$

**Implikation**

$$(\rightarrow I) \frac{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \rightarrow \psi}, \quad (\rightarrow E) \frac{\phi \rightarrow \psi \quad \phi}{\psi}$$

**Negation**

$$(\neg I) \frac{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \phi}, \quad (\neg E) \frac{\neg \neg \phi}{\phi}$$

**Falsum**

$$(\perp I) \frac{\phi \quad \neg \phi}{\perp}, \quad (\perp E) \frac{\perp}{\Psi}$$

**Gleichheit**

$$(=I) \frac{}{E = E}, \quad (=E) \frac{\phi[E/x] \quad E = D}{\phi[E/x]}$$

**Existenzquantor**

$$(\exists I) \frac{\begin{array}{c} \boxed{c}, \Phi[c/x] \\ \vdots \\ \Phi[E/x] \end{array}}{\exists x(\Phi)}, \quad (\exists E) \frac{\exists x(\phi) \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \end{array}}{\phi}$$

**Allquantor**

$$(\forall I) \frac{\begin{array}{c} \boxed{c} \\ \vdots \\ \phi[c/x] \end{array}}{\forall x(\phi)}, \quad (\forall E) \frac{\forall x(\phi)}{\phi[E/x]}$$

**Aristotelische Formen** sind Sonderformen in FOL:

- Alle  $P$  sind  $Q$ :  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
- Manche  $P$  sind  $Q$ :  $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

**Induktion** Kann auf verschiedene Strukturen betrieben werden.

**“Normale” Induktion** Zusammenbauen, zeige das für jede Vergrößerung z.Z. noch gilt.

**I.A.** Zeige, dass z.Z. gilt für einfachste(s) Element(e).

**I.V.** Seien beliebige(s) Element(e)  $A, B, \dots$  welche z.Z. schon erfüllen gegeben.

**I.S.** Sei  $X$  beliebiges Element. (anders als  $A, B, \dots$  erfüllt  $X$  z.Z. noch nicht unbedingt)

Fallunterscheidung:

1.  $X$  hat Form aus I.A.  $\rightarrow$  z.Z. gilt
2.  $X$  hat Form I
3.  $X$  hat Form II

Für jede Art (ggf. mehrere, hier zwei), auf die man Element(e) zu einem nächstkomplexeren/größeren “zusammenbauen” kann: Zeige, dass das Komplexere dann immernoch z.Z. erfüllt. “Verbaue” dabei die  $A, B, \dots$  aus der I.V., denn von diesen weiß man ja schon, dass sie z.Z. erfüllen.

**Strukturelle Induktion** auseinandernehmen, rekursiv auf einfachste Fälle zurückführen.

**I.A.** Zeige für alle einfachsten Fälle, dass sie z.Z. erfüllen.

**I.V.** Braucht man meist nicht!

**I.S.** Sei  $X$  beliebiges Element. Gehe alle Fälle durch, von welcher Form  $X$  sein könnte:

1.  $X$  hat Form aus I.A.  $\rightarrow$  z.Z. gilt
2.  $X$  hat “zusammengebaute” Form (ggf. mehrere Arten, dann mehrere Fälle)  
Argumentiere, dass einige Bestandteile wieder beliebige Elemente sind,

genau wie  $X$ , und deshalb diese Fallunterscheidung rekursiv angewendet werden kann, wobei man (da  $X$  endlich groß etc. stets irgendwann auf den Fall a) stößt und dann z.Z. gilt. Die Bestandteile erfüllen also z.Z. Beweise jetzt noch, dass für jede Art, sie zusammenzubauen (“Rekursions-schateln abbauen”) wieder z.Z. gilt.

**Course-Of-Values-Induktion** Zu zeigen:  $\forall n(P(n))$  BNF bilden, bestehend aus Signatur und einer Alternative für eine Variable. z.B.  $E, E_1, E_2 ::= \text{mult}(E_1, E_2) | \text{zero}() | v$ , mit Variable  $v$ .

**I.A.** Zeige, dass  $P$  für  $v$  und Konstanten gilt

**I.V.** *Course-of-Values*-Induktion.  $k, n$ : Terme. “ $<$ ” vergleicht Länge der Terme:  $\forall n(\forall k < n(P(k))) \rightarrow P(n)$

**I.S.** Sei ein Term  $n$  (Instanz der BNF) gegeben. Es gelte  $\forall k \leq n(P(k))$ . z.Z.:  $\forall k \leq n+1(P(k))$

Brich die Aussage auf die beteiligten Terme herunter (Siehe Seite 35 im Skript). Dank Induktions-Voraussetzung wissen wir, dass die zu beweisende Aussage bereits für die beteiligten Terme (die Bestandteile) gilt. Bilde daraus die benötigte Folgerung, also zeige, dass dann für “Zusammengesetztes” auch die zu beweisende Annahme gilt.

**Modelle/Semantik** Ein  $\Sigma$ -Modell  $\mathfrak{M}$  besteht aus

- einer nichtleeren Trägermenge  $M$ .
- einer Interpretation für jedes  $n$ -stellige Funktionssymbol  $f/n \in \Sigma$ , durch eine Funktion

$$\mathfrak{M}[f]: M^n \mapsto M$$

- einer Interpretation für jedes  $n$ -stellige Prädikatensymbol  $P/n \in \Sigma$ , durch eine Teilmenge

$$\mathfrak{M}[P] \subseteq M^n$$

Eine Umgebung  $\eta$  ist eine Abbildung  $\eta: V \rightarrow M$ , ordnet jeder Variablen  $v \in V$  einen Wert  $m \in M$  der Trägermenge zu.

Ein spezielles  $\Sigma$ -Modell ist das Herbrand-Modell, in diesem gibt es keine Variablen in den Termen. Deshalb ist  $\eta$  dann leer und kann weggelassen werden.

Ein Term  $E$  wird interpretiert wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[x]\eta &= \eta(x) \\ \mathfrak{M}[f(E_1, \dots, E_n)]\eta &= \mathfrak{M}[f]\eta(\mathfrak{M}[E_1]\eta, \dots, \mathfrak{M}[E_n]\eta) \end{aligned}$$

Erfülltheit von  $\psi$  durch  $\mathfrak{M}$  und  $\eta$  (kurz  $\mathfrak{M}, \eta \models \psi$ ):

$$\mathfrak{M}, \eta \models (E = D) \iff M[E_n]\eta = M[D_n]\eta$$

$$\mathfrak{M}, \eta \models P(E_1, \dots, E_n) \iff \in M[P]$$

$$\mathfrak{M}, \eta \models \forall x(\phi)$$

$$\iff \text{für alle } m \in M \text{ gilt: } \mathfrak{M}, \eta \models \phi$$

wo

$$\eta[x \mapsto m](y) = \begin{cases} m & \text{für } y = x \\ \eta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$