

# λ-Kalküle

<https://wwwcip.cs.fau.de/~oc45ujef/thprog/lambda.tex>

florian.guthmann@fau.de

15. Juli 2024

## Ungetyptes λ-Kalkül

Die Menge der Terme  $T(V)$  des ungetypten λ-Kalküls sind definiert durch:

$$t ::= x \mid t_1 t_2 \mid \lambda x. t \quad (x \in V)$$

wobei  $V$  eine Menge von Variablen ist.

Sei  $t$  ein Term. Die Menge  $FV(t) \subseteq V$  der freien Variablen in  $t$  ist rekursiv definiert durch:

$$FV(x) = \{x\}$$

$$FV(ts) = FV(t) \cup FV(s)$$

$$FV(\lambda x. t) = FV(t) \setminus \{x\}$$

Sei  $\sigma: V_0 \rightarrow T(V)$  eine Substitution, wobei  $V_0 \subseteq V$ . Die Anwendung einer Substitution auf einen Term ist definiert durch:

$$x\sigma = \begin{cases} \sigma(x) & x \in V_0 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(ts)\sigma = t\sigma s\sigma$$

$$(\lambda x. t)\sigma = \lambda y. t\sigma' \quad \sigma' = \sigma[x \mapsto y] \text{ und } y \notin FV(\sigma(z)) \text{ für alle } z \in FV(\lambda x. t)$$

## α-Äquivalenz

$$\lambda x. t =_\alpha \lambda y. t[y/x] \quad \text{wenn } y \notin FV(\lambda x. t)$$

## β-Reduktion

$$(\lambda x. t)s \rightarrow_\beta t[s/x]$$

## Einfach getyptes λ-Kalkül

$$\frac{x: \alpha \in \Gamma}{\Gamma \vdash x: \alpha} \text{Ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t: \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash s: \alpha}{\Gamma \vdash ts: \beta} \rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma[x \mapsto \alpha] \vdash t: \beta}{\Gamma \vdash \lambda x. t: \alpha \rightarrow \beta} \rightarrow_i$$

Einfach getyptes λ-Kalkül ( $\lambda \rightarrow$ )

## Typinferenz

$$PT(\Gamma \vdash x: \alpha) = \{\alpha \doteq \beta \mid x: \beta \in \Gamma\}$$

$$PT(\Gamma \vdash \lambda x. t: \alpha) = PT(\Gamma[x \mapsto a] \vdash t: b) \cup \{a \rightarrow b \doteq \alpha\} \quad a, b \text{ frisch}$$

$$PT(\Gamma \vdash ts: \alpha) = PT(\Gamma \vdash t: a \rightarrow \alpha) \cup PT(\Gamma \vdash s: a) \quad a \text{ frisch}$$

## System F

$$\frac{\Gamma \vdash s: \alpha \quad a \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash s: \forall a. \alpha} \forall_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash s: \forall a. \alpha}{\Gamma \vdash s: (\alpha[\beta/a])} \forall_e$$

+ die Regeln von  $\lambda \rightarrow$

System F (Curry-Stil)