Omas Problem — Eine kleine Einführung in Graphentheorie

2. April 2025

So verstehe ich das Problem:

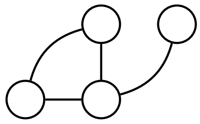
Problem. *Zeichne die Figur $\oplus$ mit einem Strich, der sich nicht selbst überlagert.*

Lösung. *Es geht nicht.*

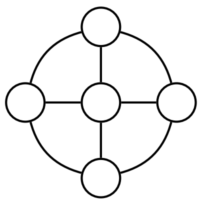
Aber warum? Um das zu beweisen, muss das Problem äquivalent in Eines der Graphentheorie umformuliert werden.

Definition (Graph)**.** Ein Graph besteht aus aus *Knoten* ◯ und *Kanten* —, wobei eine Kante immer zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Knoten verbindet.

Beispiel. Das ist ein Graph:



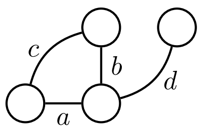
Proposition. *Die Figur $\oplus$ korrespondiert zu dem Graphen*



Was bedeutet es nun, in einem Graphen einen Strich zu ziehen?

Definition (Pfad)**.** Ein *Pfad* in einem Graphen ist eine Liste von Kanten, sodass jede Kante (bis auf die erste) mit dem Knoten beginnt, mit dem die vorherige Kante aufgehört hat.

Beispiel. (c, b, d) ist ein Pfad in dem Graphen

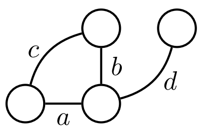


Oder auch $(a, b, c, a, b, c) \dots$

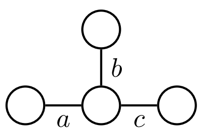
Einen Strich zu ziehen bedeutet also, einen Pfad in dem korrespondierden Graphen zu wählen. Was bedeutet es jetzt, einen Strich zu ziehen, der die gesamte Figur zeichnet, ohne sich selbst zu überlagern?

Definition (Eulerpfad)**.** Ein *Eulerpfad* ist ein Pfad in einem Graphen, der jede Kante genau einmal enthält.

Beispiel. (a, c, b, d) ist ein Eulerpfad in dem Graphen

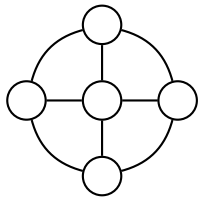


Beispiel. Nicht jeder Graph besitzt einen Eulerpfad:



Das Problem kann jetzt also umformuliert werden als:

Problem. *Besitzt der Graph*

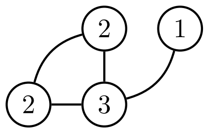


einen Eulerpfad?

Dazu schaut man sich an, welche Bedingungen ein Graph erfüllen muss, um einen Eulerpfad zu besitzen. Zuerst eine vermeintlich nicht verwandte Definition:

Definition. Der *Grad* eines Knotens in einem Graphen ist die Anzahl von Kanten, die den Knoten verbinden.

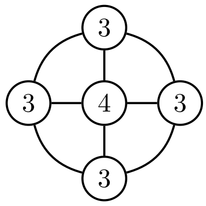
Beispiel. Die Knoten in dem folgenden Graphen sind mit ihrem Grad annotiert:



Satz. *Ein Graph besitzt einen Eulerpfad genau dann wenn genau 0 oder 2 Knoten von ungeradem Grad sind.*

Beweis. Wenn ein Knoten von einem Eulerpfad besucht wird, muss der Pfad den Knoten auch wieder verlassen. Für jeden Besuch eines Knotens braucht es also zwei Kanten, die mit dem Knoten verbunden sind. Es gibt genau zwei Ausnahmen: Der Knoten an dem der Pfad beginnt, da man ja nicht mit einer Kante zum Knoten kommen muss, sondern schon da startet, und der Knoten an dem der Pfad endet. Diese Knoten dürfen also einen ungeraden Grad haben. Wenn der Pfad am gleichen Knoten startet und endet, hat dieser Knoten wieder einen geraden Grad. Wenn der Graph also genau zwei Knoten mit ungeradem Grad besitzt, existiert ein Eulerpfad mit den Knoten als Start- bzw. Endpunkt. Sind alle Knoten von geradem Grad existiert ein Eulerpfad mit gleichem Start- und Endpunkt. □

Was heißt das jetzt für das ursprüngliche Problem? Hier ist der entsprechende Graph, mit annotierten Graden:



Es haben also 4 Knoten einen ungeraden Grad. Somit existiert kein Eulerpfad, und die Figur lässt sich nicht mit einem Strich, der sich nicht überlagert, zeichnen.