

Algorithmik kontinuierlicher Systeme Aufgabenblatt 2 — Matrixzerlegungen

Übungsgruppe – bitte ankreuzen:
(für die Rückgabe)

T01	Mo	10:15 - 11:45	00.152-113	
T02	Mo	16:15 - 17:45	H3	
T03	Di	16:15 - 17:45	H10	
T04	Mi	08:15 - 09:45	SR TM	
T05	Mi	08:15 - 09:45	R4.11	
T06	Mi	10:15 - 11:45	00.152-113	
T07	Do	10:15 - 11:45	H2	
T08	Fr	12:15 - 13:45	02.133-113	

<u>Nachname</u> , Vorname	Matrikelnr.	Studiengang	Gruppe
---------------------------	-------------	-------------	--------

<u>Nachname</u> , Vorname	Matrikelnr.	Studiengang	Gruppe
---------------------------	-------------	-------------	--------

Allgemeines:

Bitte berücksichtigen Sie, dass **nur** Abgaben mit vollständig ausgefülltem und angeheftetem Deckblatt korrigiert und bewertet werden!

Die Abgabe der Theorieaufgaben erfolgt über den Abgabebriefkasten des Lehrstuhl Informatik 10 (Cauerstr. 11, EG, neben der Bibliothek TZNE)

— In jedem Fall am **2. Mai 2018 vor 10.15 Uhr!** —

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen (0 Punkte)

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung für die nachfolgende tridiagonale Matrix (ohne Pivotsuche)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

b) Gegeben sei nun eine allgemeine tridiagonale $(n \times n)$ -Matrix der Form

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}.$$

Welche Struktur (Besetzungsprofil) haben L und R ?

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst:

- Wie ist das Profil der ersten Zeile von R und das Profil der ersten Spalte von L ?
- Welche Einträge werden im ersten Substitutionsschritt verändert und wie sieht das Profil der resultierenden $(n-1 \times n-1)$ -Untermatrix aus?

c) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der tridiagonalen Matrix von Teil b).

d) Wie groß ist jeweils der Aufwand zum Lösen der beiden Teilprobleme $Ly = b$ und $Rx = y$?

Aufgabe 2 — LR-Zerlegung (mit Spalten-Pivotsuche) (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der folgenden Matrix **mit** Pivotsuche:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Verwenden Sie folgende Strategie: *Jeweils in der betrachteten (Rest-)Spalte das betragsgrößte Element suchen und dies durch Zeilenvertauschen auf die Diagonale bringen (Spalten-Pivotisierung).*

b) Lösen Sie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$ ($i = 1, 2$) mit Hilfe der LR-Zerlegung aus Teil a) (Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen!) für

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie für allgemeine Matrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ die Komplexität für die LR-Zerlegung, das Vorwärts- und das Rückwärtseinsetzen in \mathcal{O} -Notation einschließlich Koeffizienten an! Welche Komplexität in \mathcal{O} -Notation folgt demnach für das Lösen eines linearen Gleichungssystems mittels LR-Zerlegung (keine Herleitung erforderlich)?

Aufgabe 3 — QR-Zerlegung (6 Punkte)

a) Das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

soll unter Verwendung der QR-Zerlegung der Matrix \mathbf{A} gelöst werden. Diese ist bekannt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

Dabei ist \mathbf{R} eine rechte Dreiecksmatrix und \mathbf{Q} eine orthogonale Matrix. Berechnen Sie den Lösungsvektor \mathbf{x} .

b) Bestimmen Sie zu der Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ eine Drehung \mathbf{S} , so dass $\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ gilt.

c) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, indem Sie das Ergebnis von Teil b) verwenden.