

## Algorithmik kontinuierlicher Systeme Aufgabenblatt 10 — Optimierung

Übungsgruppe – bitte ankreuzen:  
(für die Rückgabe)

T01	Mo	10:15 - 11:45	00.152-113	
T02	Mo	16:15 - 17:45	H3	
T03	Di	16:15 - 17:45	H10	
T04	Mi	08:15 - 09:45	R4.11	
T05	Mi	08:15 - 09:45	SR TM	
T06	Mi	10:15 - 11:45	00.152-113	
T07	Do	10:15 - 11:45	H2	
T08	Fr	12:15 - 13:45	02.133-113	

---

Nachname, Vorname

---

Matrikelnr.

---

Studiengang

---

Gruppe

---

Nachname, Vorname

---

Matrikelnr.

---

Studiengang

---

Gruppe

**Allgemeines:**

Bitte berücksichtigen Sie, dass **nur** Abgaben mit vollständig ausgefülltem und angeheftetem Deckblatt korrigiert und bewertet werden!

Die Abgabe der Theorieaufgaben erfolgt über den Abgabebriefkasten des Lehrstuhl Informatik 10 (Cauerstr. 11, EG, neben der Bibliothek TZNE)

— In jedem Fall am 10. Juli 2018 vor 10.15 Uhr! —

**Aufgabe 1 — (Quadratisches Funktional, CG-Verfahren) (0 Punkte)**

$\mathbf{A}$  sei eine symmetrisch positive definite Matrix aus  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b}$  ein Vektor  $\mathbb{R}^n$  und  $c$  aus  $\mathbb{R}$ . Man betrachte das quadratische Funktional auf  $\mathbb{R}^n$ :

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2 \cdot \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$$

a) Bestimmen Sie zu gegebenem Startvektor  $\mathbf{x}_0$  und Suchrichtung  $\mathbf{s}_0$  die optimale Schrittweite  $\tau$  für das Abstiegsverfahren. D.h. die Stelle an der die Funktion  $q(\tau) = Q(\mathbf{x}_0 + \tau \cdot \mathbf{s}_0)$  minimal wird.

*Hinweis:  $q(\tau)$  ist eine Parabel*

Im folgenden sei  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $c = 2$  und der Startwert  $\mathbf{x}_0 = [-1, 2]^T$ .

b) Bestimmen Sie den Gradienten  $\nabla Q(\mathbf{x}_0)$ , die Suchrichtung  $\mathbf{s}_0$  und die optimale Schrittweite für den Gradientenabstieg durch Verwendung des Ergebnisses aus a).

c) Führen Sie den ersten Schritt des Gradientenverfahrens durch (Ergebnis  $\mathbf{x}_1$ ).

d) Führen Sie einen weiteren Schritt des Gradientenverfahrens durch (wiederrum unter Verwendung der optimalen Schrittweite).

e) Bestimmen Sie einen  $\mathbf{A}$ -konjugierten Vektor zu  $\mathbf{s}_0$  aus b).

f) Führen Sie zwei Schritte des CG-Verfahrens mit Startpunkt  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{s}_0$  von Teil b) durch. Warum sollte  $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b} = 0$  sein?

**Aufgabe 2 — Iterative Verfahren (8 Punkte)**

a) Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Konvergiert das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren für ein lineares Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit beliebiger rechter Seite  $\mathbf{b}$ ?

b) Führen Sie jeweils einen Iterationsschritt aus für das Jacobi-Verfahren, für das Gauß-Seidel-Verfahren und für das SOR-Verfahren mit  $\omega = 1.5$  durch, um das Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  zu lösen. Benutzen Sie jeweils den Startvektor  $\mathbf{x}_0 = [1, 1, 1, 1]^T$  und die rechte Seite  $\mathbf{b} = [2, 3, 1, 4]^T$ .

c) Gegeben sei die Matrix  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Stellen Sie die Iterationsmatrix für das Jacobi-Verfahren auf und zeigen Sie durch den Spektralradius, dass das Jacobi-Verfahren konvergiert.

### Aufgabe 3 — Abstiegsverfahren (7 Punkte)

Die Zielfunktion  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 x_2 - x_1 + 2x_2 - 1$  soll mit einem Abstiegsverfahren minimiert werden.

a) Das Gradientenverfahren ist über die folgende Iterationsvorschrift definiert:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - t \cdot \nabla f(\mathbf{x}_i)$$

Führen Sie einen Schritt des Gradientenverfahrens mit Startwert  $\mathbf{x}_0 = [1, 1]^T$  und Schrittweite  $t = \frac{1}{2}$  durch.

b) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit Startwert  $\mathbf{x}_0 = [1, 1]^T$  durch.

c) Skizzieren Sie die Ergebnisse aus a) und b) in ein Koordinatensystem. Konvergieren beide Verfahren, wenn das globale Minimum bei ca.  $[2.43, 0.91]^T$  liegt?