



Wintersemester 2017/2018

## Lineare und kombinatorische Optimierung

### Übungsblatt 13

#### Gruppenübungen

#### Aufgabe 1. (Duale Programme)

(0 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$\begin{array}{ll}
 \min & 7x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\
 \text{s.t.} & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 4 \\
 & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\
 & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\
 & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \\
 & x_5 \text{ frei}
 \end{array} \tag{P}$$

Formulieren Sie das zu (P) duale Problem.

#### Lösung:

(P) lautet in natürlicher Form (hiermit ist nicht die Standardform gemeint, sondern nur, dass Ungleichungen in der Form  $\geq$  vorliegen (bei Maximierungsproblemen  $\leq$ ))

$$\begin{array}{ll}
 \min & 7x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\
 \text{s.t.} & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 4 \\
 & -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \geq -3 \\
 & -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 \geq -5 \\
 & -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -1 \\
 & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \\
 & x_5 \text{ frei}
 \end{array} \tag{P}$$

Das Duale Problem (D) lautet nach den Transformationsregeln (siehe Tabelle 11.1) somit

$$\begin{array}{ll}
 \max & 4u_1 - 3u_2 - 5u_3 - u_4 \\
 \text{s.t.} & u_1 - 4u_2 - 2u_3 - 3u_4 \leq 7 \\
 & 3u_1 - 2u_2 - 4u_3 - u_4 \leq -6 \\
 & 5u_1 + 2u_2 - 4u_3 - 2u_4 \leq 5 \\
 & -2u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 \leq -2 \\
 & 2u_1 - u_2 - 5u_3 + 2u_4 = 3 \\
 & u_1 \text{ frei, } u_2, \dots, u_4 \geq 0.
 \end{array} \tag{D}$$

#### Aufgabe 2. (Dualität und komplementärer Schlupf)

(0 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4, \\
 & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3, \\
 & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1, \\
 & x_1, \dots, x_5 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{P}$$

- (i) Formulieren Sie das zu (P) duale Problem.  
(ii) Prüfen Sie mithilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob  $\bar{x} = (0, 4/3, 2/3, 5/3, 0)^\top$  eine Optimallösung von (P) ist.

**Lösung:**

- (i) Das duale Problem zu (P) lautet:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4u_1 + 3u_2 + 5u_3 + u_4 \\
 \text{s.t.} \quad & u_1 + 4u_2 + 2u_3 + 3u_4 \geq 7 \\
 & 3u_1 + 2u_2 + 4u_3 + u_4 \geq 6 \\
 (D) \quad & 5u_1 - 2u_2 + 4u_3 + 2u_4 \geq 5 \\
 & -2u_1 + u_2 - 2u_3 - u_4 \geq -2 \\
 & 2u_1 + u_2 + 5u_3 - 2u_4 \geq 3 \\
 & u_1, \dots, u_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

- (ii) In  $\bar{x} = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^\top$  sind die erste, zweite und vierte Nebenbedingung von (P) aktiv, die dritte Ungleichung ist inaktiv. Wenn  $\bar{x}$  optimal für (P) ist, gilt laut Satz vom schwachen komplementären Schlupf (Satz 11.10) für eine Optimallösung  $\bar{u}$  von (D):  $\bar{u}_3 = 0$ . Da  $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4 > 0$ , müssen in (D) die zweite, dritte und vierte Ungleichung aktiv sein. Zusammen mit  $\bar{u}_3 = 0$  ergibt dies das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 3u_1 + 2u_2 + u_4 &= 6 \\
 5u_1 - 2u_2 + 2u_4 &= 5 \\
 -2u_1 + u_2 - u_4 &= -2
 \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung hiervon ist  $u_1 = u_2 = u_4 = 1$ .

Die so errechnete Lösung  $(u_1, \dots, u_4) = (1, 1, 0, 1)$  ist jedoch für (D) nicht zulässig, da sie die fünfte Ungleichung von (D) nicht erfüllt. Daher kann auch  $\bar{x}$  nicht optimal für (P) sein.

**Aufgabe 3.** (Eine weitere Variante des Farkas-Lemmas) (0 Punkte)

Beweisen Sie: Es seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dann hat genau eines der beiden folgenden Systeme

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

und

$$y^\top A \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y^\top b < 0$$

eine Lösung.

**Lösung:**

Mit der Einheitsmatrix  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und dem Nullvektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  definieren wir  $A' = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$  und  $b' = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Offensichtlich hat das System  $Ax \leq b, x \geq 0$  genau dann eine Lösung, wenn das System  $A'x \leq b'$  eine Lösung hat. Dies ist nach Farkas Variante (Korollar 11.6) genau dann der Fall, wenn

$$A'^T y = 0, \quad y \geq 0, \quad b'^T y < 0$$

keine Lösung hat. Dieses System lässt sich auch schreiben als

$$(A^T, -I)y = 0, y \geq 0, (b^T, 0)y < 0.$$

Mit  $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^{m+n}$  ist dieses System äquivalent zu

$$A^T y_1 - y_2 = 0, y_1, y_2 \geq 0, b^T y_1 < 0$$

oder auch

$$A^T y_1 \geq 0, y_1 \geq 0, b^T y_1 < 0.$$

## Hausübungen

**Aufgabe 4.** (Starker komplementärer Schlupf)

(4 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{array}$$

mit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Finde für (P) und sein duales Problem (D) ein Paar von Optimallösungen  $\bar{x}, \bar{y}$ , in der die Äquivalenzen des Satzes vom starken komplementären Schlupf (Satz 11.12) gelten, und ein Paar von Optimallösungen  $\hat{x}, \hat{y}$ , in der die Äquivalenzen nicht gelten. Gib  $\bar{x}, \bar{y}$  und  $\hat{x}, \hat{y}$  an.

**Lösung:**

Optimallösungen von (P) liegen in der Menge  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in [0, 1] \right\}$ .

Seien  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$  und  $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Wir zeigen nun, dass der Satz vom starken komplementären Schlupf in  $\bar{x}$  erfüllt ist und in  $\hat{x}$  nicht erfüllt ist.

(D) hat die Form

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y = c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Nach dem starken Dualitätssatz wissen wir, dass, wenn (P) eine endliche Optimallösung hat, ebenfalls (D) eine endliche Optimallösung besitzt und dass die Zielfunktionswerte übereinstimmen. Der Zielfunktionswert von (P) ist  $(-1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = -1$ . Daraus folgt, dass der Zielfunktionswert von (D) ebenfalls -1 sein muss:

$$b^T y = (0, 0, -1, 3) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = -y_3 + 3y_4 = -1. \quad (1)$$

Der Satz vom starken komplementären Schlupf sagt aus, dass

$$\begin{array}{ll} y_i > 0 & \Leftrightarrow A_i \cdot x = b_i \\ y_i = 0 & \Leftrightarrow A_i \cdot x < b_i. \end{array}$$

Für  $\bar{x}$  gilt:

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet, dass  $A_1.\bar{x} < b_1$ ,  $A_2.\bar{x} < b_2$ ,  $A_3.\bar{x} = b_3$  und  $A_4.\bar{x} < b_4$ . Woraus mit dem Satz vom schwachen komplementären Schlupf (Satz 11.10) folgt, dass  $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}_4 = 0$ . Nach (1) gilt:  $-\bar{y}_3 + 3\bar{y}_4 = -1$ , woraus sich  $\bar{y}_3 = 1$  ergibt.  $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$  ist zulässig für (D) und der Satz vom starken komplementären Schlupf ist hier erfüllt.

Für  $\hat{x}$  gilt:

$$A\hat{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet, dass  $A_1.\hat{x} = b_1$ ,  $A_2.\hat{x} < b_2$ ,  $A_3.\hat{x} = b_3$  und  $A_4.\hat{x} < b_4$ . Woraus folgt, dass  $\hat{y}_2 = \hat{y}_4 = 0$ . Nach (1) gilt:  $-\hat{y}_3 + 3\hat{y}_4 = -1$ , woraus sich  $\hat{y}_3 = 1$  ergibt. Für  $\hat{y}_1$  ergibt sich aus den Nebenbedingung von (D) die Gleichung

$$-\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + \hat{y}_4 = -1$$

Woraus  $\hat{y}_1 = 0$  folgt. Der Satz vom starken komplementären Schlupf ist hier also nicht erfüllt, dafür müsste  $\hat{y}_1 > 0$  gelten. Die Konstruktion zeigt, dass für  $\hat{x}$  überhaupt keine zugehörige duale Lösung existiert, die den Satz vom starken komplementären Schlupf erfüllt.

**Alternative Vorgehensweise:** Das duale LP (D) hat die eindeutige Optimallösung  $y = (0, 0, 1, 0)$ . Für  $\bar{x}, y$  und  $\hat{x}, y$  überprüfen wir jeweils, ob der starke komplementäre Schlupf erfüllt ist.

**Aufgabe 5.** (Ökonomische Interpretation der Dualvariablen)

(1+1+1 Punkte)

Ein Förster ist für die Bewirtschaftung von 100 Hektar Eichenbestand verantwortlich. Die Eichen zu fällen und die Fläche selbst regenerieren zu lassen würde pro Hektar 10€ Sofortkosten verursachen und einen Ertrag von 50€ pro Hektar bringen. Eine andere Möglichkeit wäre es, die Eichen zu fällen und die Fläche mit Kiefern zu bepflanzen. Dadurch würden 50€ Sofortkosten pro Hektar anfallen und ein Ertrag von 120€ pro Hektar entstehen. Unglücklicherweise kann die profitablere zweite Möglichkeit nicht für die Gesamtfläche von 100 Hektar angewandt werden weil nur 4000€ für die Sofortkosten zur Verfügung stehen.

- (i) Formulieren Sie das Problem als lineares Problem und geben Sie eine Optimallösung an.
- (ii) Formulieren Sie das duale Problem zu Aufgabe (i) und geben Sie eine Optimallösung an.
- (iii) Angenommen, der Förster könnte ein Darlehen für weitere 1000€ Sofortkosten bekommen. Bis zu wie viel Cent Zinsen pro geliehenem € wäre das Darlehen eine gute Alternative?

**Lösung:**

(i)

$$\begin{array}{llll} \max & 40x_1 & + & 70x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 \leq 100 \\ & 10x_1 & + & 50x_2 \leq 4000 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Als eine Optimallösung erhalten wir  $x_1^* = 25$ ,  $x_2^* = 75$  mit Zielfunktionswert 6250€.

(ii)

$$\begin{array}{llll} \min & 100y_1 & + & 4000y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 & + & 10y_2 \geq 40 \\ & y_1 & + & 50y_2 \geq 70 \\ & & & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Als eine Optimallösung erhalten wir  $y_1^* = 32.5$ ,  $y_2^* = 0.75$  mit Zielfunktionswert 6250 €.

- (iii) Ausschlaggebend ist hier der Wert der Dualvariablen  $y_2^*$ . Das Darlehen wäre eine gute Alternative bis zu 0.75 € Zinsen pro geliehenem €. Bzw. würde man die Sofortkosten von 4000 € auf 4001 € erhöhen, dann würde sich der Zielfunktionswert um 0.75 € verbessern. Die Dualvariablen werden in diesem Zusammenhang auch als Schattenpreise (engl. shadow prices) bezeichnet.

**Aufgabe 6.** (Sensitivitätsanalyse)

(2+2+2 Punkte)

Wir betrachten das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

1. Zeigen Sie mithilfe des dualen Problems, dass  $\bar{x} = (0, 4)$  optimal für (P) ist.
2. Wir betrachten nun für kleine  $\Delta b = (\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3) \in \mathbb{R}^3$  das gestörte Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max_y \quad & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 6 + \Delta b_1, \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 15 + \Delta b_2, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 + \Delta b_3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{G}$$

Bestimmen Sie, wie in Kapitel 11.7 (Sensitivitätsanalyse), für hinreichend kleine  $\Delta b$  eine Optimallösung und den optimalen Zielfunktionswert des gestörten Problems.

3. Sei  $U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_\infty \leq \rho\}$  mit  $\rho > 0$ . Bestimmen Sie das größtmögliche  $\rho$ , sodass man für alle  $\Delta b \in U$  mithilfe von  $\bar{x}$  aus Teilaufgabe 1 eine optimale Lösung des gestörten Problems (G) erhalten kann. Hierbei bezeichne  $\|\cdot\|_\infty$  die Maximumsnorm:  $\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$  für  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Lösung:**

1. Das duale Problem lautet:

$$\begin{aligned} \min_y \quad & 6y_1 + 15y_2 + 8y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2, \\ & y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 5, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{D}$$

Wir nutzen den Satz vom komplementären Schlupf:

Angenommen  $\bar{x}$  wäre optimal für das primale Problem. Die ersten beiden Ungleichungen des primalen Problems werden von  $\bar{x}$  strikt erfüllt, also sind die zugehörigen Dualvariablen in der optimalen Duallösung  $\bar{y}$  gleich 0. Außerdem erfüllt  $\bar{y}$  die zweite Ungleichung im dualen Problem wegen  $\bar{x}_2 = 4 > 0$  mit Gleichheit. Damit folgt:

$$\bar{y} = \left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$$

Wie man leicht nachrechnen kann, ist  $\bar{y}$  dual zulässig und hat einen Zielfunktionswert von  $6 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{5}{2} = 20$ . Dieser stimmt damit mit dem Zielfunktionswert von  $\bar{x}$  überein, weswegen  $\bar{x}$  eine primale und  $\bar{y}$  eine duale Optimallösung sein muss.

2. Wir führen zunächst Schlupfvariablen in das primale

$$\begin{aligned} \max_x \quad & (2 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0) x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{S}$$

und das gestörte Problem

$$\begin{aligned} \max_x \quad & (2 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0) x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 + \Delta b_1 \\ 15 + \Delta b_2 \\ 8 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{GS}$$

ein.

Aus der ersten Teilaufgabe folgt, dass  $B = (2, 3, 4)$  eine optimale Basis und  $\bar{x}^* = (0, 4, 2, 3, 0)$  eine optimale Lösung für (S) ist. Wir betrachten den Vektor

$$\bar{x}'^* = \begin{pmatrix} \bar{x}'_B \\ \bar{x}'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}^*_B \\ \bar{x}^*_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_B^{-1} \Delta b \\ 0 \end{pmatrix},$$

der wegen  $\bar{x}^*_B > 0$  für hinreichend kleine  $\Delta b$  eine zulässige Basislösung für (GS) ist. Da der Vektor  $z_N = c_N - A_N^T (A_B^T)^{-1} c_B \geq 0$  der reduzierten Kosten für (S) unabhängig von  $b$  ist, ist dies auch der Vektor der reduzierten Kosten für (GS), weswegen  $\bar{x}'^*$  optimal für (GS) ist.

Mit  $A_B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  erhalten wir also die folgende Optimallösung für (GS):

$$\bar{x}'^* = \left( 0, 4 + \frac{1}{2} \Delta b_3, 2 + \Delta b_1 - \frac{1}{2} \Delta b_2, 3 + \Delta b_2 - \frac{3}{2} \Delta b_3, 0 \right).$$

Also ist  $\bar{x}' = \left( 0, 4 + \frac{1}{2} \Delta b_3 \right)$  eine Optimallösung des gestörten Problems mit Zielfunktionswert  $20 + \frac{5}{2} \Delta b_3$ .

3. Damit  $\bar{x}'^*$  zulässig ist, muss  $\bar{x}'^* \geq 0$  sein ( $\forall \Delta b \in U$ ). Daher muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta b_3 &\geq -\frac{1}{2} \rho \geq -4 \\ \Delta b_1 - \frac{1}{2} \Delta b_2 &\geq -\rho - \frac{1}{2} \rho = -\frac{3}{2} \rho \geq -2 \\ \Delta b_2 - \frac{3}{2} \Delta b_3 &\geq -\rho - \frac{3}{2} \rho = -\frac{5}{2} \rho \geq -3 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\rho \leq 8 \wedge \rho \leq \frac{4}{3} \wedge \rho \leq \frac{6}{5},$$

also können wir  $\rho = \frac{6}{5}$  wählen. Dies ist auch das maximale  $\rho$ , da  $\bar{x}'^*$  für  $\rho > \frac{6}{5}$  und  $\Delta b = (0, -\rho, \rho)$  im vierten Eintrag echt kleiner 0 ist bzw.  $\bar{x}'$  die zweite Ungleichung des gestörten Problems nicht erfüllt.

### Aufgabe 7. (Optimallösungen)

(2+2+1 Punkte)

Betrachte das lineare Optimierungsproblem  $\max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Vektoren  $c \in \mathbb{R}^2$  hat das lineare Problem

1. genau eine Optimallösung,
2. unendlich viele Optimallösungen,
3. keine Optimallösung?

Gib eine Ungleichung  $a^T x \leq \alpha$  (mit  $a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ ) an, sodass das lineare Problem

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, a^T x \leq \alpha\}$$

für jedes  $c \in \mathbb{R}^2$  mindestens eine Optimallösung hat.

### Lösung:

Die zulässige Menge ist in Abbildung 1 dargestellt.

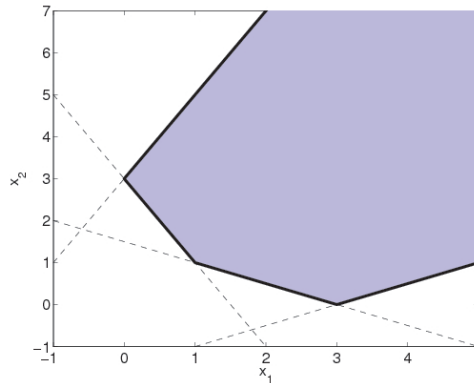


Abbildung 1: Die zulässige Menge des ursprünglichen linearen Optimierungsproblems.

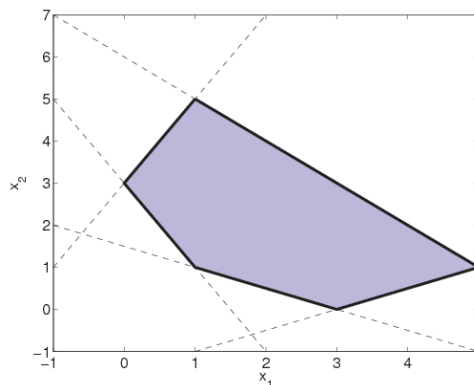


Abbildung 2: Die zulässige Menge des modifizierten linearen Optimierungsproblems.

In der anschließenden Musterlösung wird auf einige Begriffe aus der Polyedertheorie Bezug genommen, die Sie so in der Vorlesung noch nicht gehört haben. Aus diesem Grund haben wir die entsprechenden Definitionen nachfolgend angegeben. Mehr Details zu Polyedertheorie erfahren Sie in den Vorlesungen *Diskrete Optimierung I+II*.

**Definition 0.1** (Gültige Ungleichung, Seitenfläche, Facette). Seien  $c \in \mathbb{K}^n$  ein Vektor und  $\gamma \in \mathbb{K}$ . Wir sagen, dass die Ungleichung

$$c^\top x \leq \gamma$$

gültig für  $S \subseteq \mathbb{K}^n$  ist, falls  $c^\top x \leq \gamma$  für alle  $x \in S$  gilt.

Sei  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  ein Polyeder. Eine Menge  $F \subseteq P$  heißt *Seitenfläche* von  $P$ , wenn es eine für  $P$  gültige Ungleichung  $c^\top x \leq \gamma$  gibt, so dass

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{K}^n : c^\top x = \gamma\}.$$

Eine nichttriviale Seitenfläche  $F$  des Polyeders  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  heißt *Facette*, wenn  $F$  nicht strikt in einer echten Seitenfläche von  $P$  enthalten ist.

**Definition 0.2** (Konische Kombination).  $y \in \mathbb{K}^n$  ist eine *konische Kombination* von  $x_1, \dots, x_q \in \mathbb{K}^n$ , falls  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, q$  existieren mit  $y = \sum_{j=1}^q \lambda_j x_j$ .

1. Das lineare Optimierungsproblem hat genau dann eine eindeutige Optimallösung, wenn diese in einer der drei Ecken  $(0, 3)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(3, 0)$  angenommen wird. Im Allgemeinen ist eine Ecke  $p$  die einzige Optimallösung eines linearen Optimierungsproblems genau dann, wenn  $c$  eine echte konische Kombination der Normalenvektoren aller Facetten ist, die  $p$  enthalten.

Die Ecke  $(0, 3)$  ist in den Facetten enthalten, die durch die Ungleichungen  $-2x_1 + x_2 \leq 3$  und  $-2x_1 - x_2 \leq -3$  definiert werden. Die zugehörigen Normalenvektoren sind  $(-2, 1)$  und  $(-2, -1)$ . Daher ist  $(0, 3)$  genau dann die eindeutige Lösung des LPs, wenn

$$c \in \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu > 0 \right\} =: \mathcal{M}_1.$$

Analog ergibt sich: Die Ecke  $(1, 1)$  ist genau dann die eindeutige Lösung des LPs, wenn

$$c \in \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu > 0 \right\} =: \mathcal{M}_2.$$

Die Ecke  $(3, 0)$  ist genau dann die eindeutige Lösung des LPs, wenn

$$c \in \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu > 0 \right\} =: \mathcal{M}_3.$$

Daher hat das lineare Optimierungsproblem genau dann eine eindeutige Lösung, wenn

$$c \in \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3.$$

2. Das lineare Optimierungsproblem hat genau dann unendlich viele Optimallösungen, wenn  $c$  senkrecht auf einer Seitenfläche von  $\mathcal{P}(A, b)$  steht, deren Dimension größer gleich 1 ist.

In diesem Beispiel gibt es genau fünf solcher Seitenflächen nämlich die vier Facetten, deren definierende Ungleichungen gerade die Ungleichungen sind, die das Polyeder definieren (bzw. Vielfache davon), sowie das Polyeder selber.

Daher hat das LP genau dann unendlich viele Optimallösungen, wenn

$$c \in \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda > 0 \right\} \cup \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda > 0 \right\} \cup \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda > 0 \right\} \cup \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda > 0 \right\} \cup \{0\}.$$

3. Das lineare Optimierungsproblem hat dann keine Optimallösung, wenn  $c$  nicht eine der in 1 oder 2 beschriebenen Bedingungen erfüllt.

Um zu garantieren, dass das Problem immer mindestens eine Optimallösung hat, muss sichergestellt werden, dass die zulässige Menge kompakt, aber nicht leer ist. Dies kann zum Beispiel durch Hinzufügen der Ungleichung  $x_1 + x_2 \leq 6$  geschehen (siehe Abbildung 2).

Gruppe 1: Abgabe der Hausaufgaben am 06.02.2018 in der Übung.  
Gruppe 2+3: Abgabe der Hausaufgaben am 07.02.2018 in der jeweiligen Übung.