



---

Wintersemester 2017/2018

---

## Lineare und kombinatorische Optimierung

### Übungsblatt 9

#### Gruppenübungen

##### Aufgabe 1. (Uniformes Matroid)

(0 Punkte)

**Definition 0.1** (Uniformes Matroid). Seien  $0 \leq m \leq n$  ganze Zahlen. Setzen wir  $E := \{1, \dots, n\}$  und  $\mathcal{B} := \{I \subseteq E : |I| = m\}$  als die Menge aller  $m$ -elementigen Teilmengen von  $E$ . Die so definierten Mengen erfüllen die Axiome der Basen (B1) und (B2) und die Menge  $\mathcal{B}$  induziert somit eine Menge von unabhängigen Teilmengen  $\mathcal{I}$ , so dass  $U_{m,n} = (E, \mathcal{I})$  ein Matroid ist. Das Matroid  $U_{m,n}$  nennen wir *uniformes Matroid* vom Rang  $m$  mit  $n$  Elementen.

**Definition 0.2** (Galois field). Für jede Primzahl  $p$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$  existiert bis auf Isomorphie genau ein Körper mit  $p^n$  Elementen, der mit  $\mathbb{F}_{p^n}$  oder  $\text{GF}(p^n)$  (engl. Galois field) bezeichnet wird.  $\mathbb{F}_p = \text{GF}(p)$  ist der Körper der Restklassen ganzer Zahlen modulo  $p$ .

**Definition 0.3** (Repräsentierbarkeit). Ist ein Matroid  $M$  isomorph zu einem Vektormatroid  $M[A]$  einer Matrix  $A$  über einem Körper  $\mathbb{K}$ , dann ist  $M$  *repräsentierbar* über  $\mathbb{K}$ .

1. Geben Sie vom Matroid  $U_{2,4}$  die Mengenfamilie  $\mathcal{I}$  an.
2. Gilt  $r(U_{2,4}) = r(U_{2,4|\{1,3\}})$ ?
3. Geben Sie das Basissystem  $\mathcal{B}$  und das Kreissystem  $\mathcal{C}$  von  $U_{3,4}$  an.
4. Wie sieht das duale Matroid  $U_{2,4}^*$  von  $U_{2,4}$  aus?
5. Zeigen Sie, dass  $U_{2,4}$  nicht über  $\text{GF}(2)$  repräsentierbar ist.
6. Ist  $U_{2,4}$  über  $\mathbb{R}$  repräsentierbar?

#### Lösung:

1.  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ .

Generell gilt für das Mengensystem der unabhängigen Mengen eines uniformen Matroids

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E : |X| \leq m\}.$$

2.  $\mathcal{I}(U_{2,4|\{1,3\}}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$  und damit  $r(U_{2,4}) = r(U_{2,4|\{1,3\}}) = 2$ .

3. Das Basissystem von  $U_{3,4}$  ist  $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$  und das Kreissystem ist  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$ .

Für das Kreissystem eines uniformen Matroids  $U_{m,n}$  gilt

$$\mathcal{C}(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } m = n, \\ \{X \subseteq E : |X| = m + 1\}, & \text{falls } m < n. \end{cases}$$

4. Es gilt  $U_{m,n}^* = U_{n-m,n}$  und damit  $U_{2,4}^* = U_{2,4}$  (selbstdual).  
 5. Falls eine Repräsentation von  $U_{2,4}$  über  $\text{GF}(2)$  existiert, erhalten wir eine Matrix  $A$  der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix},$$

wobei  $* \in \text{GF}(2)$ . Dabei dürfte keine Spalte der Nullvektor sein und je zwei Spalten müssen linear unabhängig sein. Dies ist aber nicht möglich, da es nur drei unterschiedliche Spalten ungleich der Nullspalte in  $\text{GF}(2)$  gibt. Damit ist  $U_{2,4}$  nicht repräsentierbar über  $\text{GF}(2)$ .

6. Allerdings ist  $U_{2,4}$  repräsentierbar über andere Körper. Zum Beispiel über  $\mathbb{R}$  mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2.** (Beweise von Lemma 8.23 und Satz 8.24)

(0 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

1. **Lemma 8.23:** Sei  $M$  ein graphisches Matroid, dann gilt  $M \cong M(G)$  für einen zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$ .
2. **Satz 8.24:** Weder  $M^*(K_5)$  noch  $M^*(K_{3,3})$  sind graphisch.  
 (Tipp: Sie können Lemma 8.23 zum Beweis verwenden.)

**Lösung:**

1. Da  $M$  graphisch ist, gilt  $M \cong M(H)$  für einen Graphen  $H$ . Falls  $H$  zusammenhängend ist, folgt die Behauptung. Im anderen Fall seien  $H_1, H_2, \dots, H_n$  die Zusammenhangskomponenten von  $H$ . Für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  wähle einen Knoten  $v_i$  in  $H_i$ . Erstelle einen neuen Graphen  $G$  indem  $v_1, v_2, \dots, v_n$  als ein einzelner Knoten betrachtet wird. Offensichtlich gilt  $E(H) = E(G)$  und  $G$  ist zusammenhängend. Weiter gilt für  $X \subseteq E(H)$ , dass  $X$  die Kantenmenge eines Kreises in  $H$  genau dann ist, wenn  $X$  die Kantenmenge eines Kreises in  $G$  ist. Damit gilt aber  $M(G) \cong M(H)$ .
2. Angenommen,  $M^*(K_5) \cong M(G)$  für einen Graphen  $G$ . Aus Lemma 8.23 können wir folgern, dass  $G$  zusammenhängend ist.  $M(K_5)$  besitzt 10 Elemente und  $r(M(K_5)) = 4$ . Aus Bemerkung 8.19 folgt dann, dass  $M^*(K_5)$  10 Elemente hat mit  $r(M^*(K_5)) = 6$ . Wir folgern weiter aus Bemerkung 8.16, dass  $G$  somit 7 Knoten und 10 Kanten hat. Damit ist der durchschnittliche Knotengrad in  $G$  gleich  $2|E(G)|/|V(G)|$ , also  $20/7 < 3$ . Dadurch hat  $G$  einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) \leq 2$ . Was aber bedeutet, dass  $M^*(G)$  einen Kreis der Länge höchstens zwei hat. Somit müsste  $K_5$  einen Kreis der Länge höchstens zwei haben, was ein Widerspruch ist. Das Matroid  $M^*(K_5)$  ist also nicht graphisch. Den Fall, dass  $M^*(K_{3,3})$  nicht graphisch ist, zeigt man analog.

**Aufgabe 3.** (Gewichtsdichtengreedy für das Rucksackproblem)

(0 Punkte)

Betrachtet man das 0/1-Rucksack-Problem, so stehen einem ein Rucksack mit einer Kapazität  $b$  und verschiedene Gegenstände  $i$  zur Verfügung, die jeweils ein Gewicht  $a_i$  haben und einen Gewinn  $c_i$  bringen. Die Frage ist nun, welche Gegenstände in den Rucksack eingepackt werden, sodass die Kapazitätsbeschränkung eingehalten und der Gewinn maximiert wird.

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & a^\top x \leq b, \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

1. Stellen Sie das Problem als ein Maximierungsproblem über einem Unabhängigkeitssystem dar.
2. Begründen Sie warum das oben gewählte Unabhängigkeitssystem kein Matroid ist?
3. Um zulässige Lösungen für Optimierungsprobleme zu finden, kann man Greedy-Algorithmen benutzen. Die Idee von Greedy-Algorithmen ist es, eine Lösung von Null (der leeren Menge) beginnend aufzubauen und dabei in jedem Schritt denjenigen Gegenstand (Variable) zu nehmen, der (die) den meisten Profit verspricht. Für das Rucksackproblem betrachten wir den Gewichtslichtengreedy-Algorithmus (siehe Algorithmus 1).

---

**Algorithmus 1** Gewichtslichtengreedy für das Rucksackproblem

---

**Eingabe:**  $a, c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

**Ausgabe:** Eine zulässige Lösung  $x \in \{0, 1\}^n$  des Rucksackproblems.

```

1: Sortiere Variablen so, dass  $\frac{c_i}{a_i} \geq \frac{c_{i+1}}{a_{i+1}}$ .
2: for  $i = 1, \dots, n$  do
3:   if  $a_i \leq b$  then
4:      $x_i = 1$ 
5:      $b = b - a_i$ 
6:   else
7:      $x_i = 0$ 

```

---

Benutze den Gewichtslichten-Greedy-Algorithmus, um für das 0/1-Rucksack-Problem mit

$$a = (1, 3, 2, 1, 2)^\top, \quad b = 5, \quad c = (2, 4, 3, 3, 4)^\top$$

eine zulässige Lösung zu bestimmen. Ist diese Lösung optimal?

**Lösung:**

1. Sei  $n$  die Anzahl der Gegenstände. Dann wählen wir als Grundmenge  $E = \{1, \dots, n\}$  und als Unabhängigkeitssystem  $\mathcal{I}$  die Menge der zulässigen Lösungen des Rucksackproblems, also

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq E : \sum_{i \in I} a_i \leq b\}.$$

Dann ist  $\mathcal{I}$  ein Unabhängigkeitssystem, da jede Teillösung einer zulässigen Lösung ebenfalls zulässig ist. Wir können das Rucksackproblem als Maximierungsproblem über einem Unabhängigkeitssystem schreiben:

$$\max_{I \in \mathcal{I}} c(I).$$

*Alternative:* Etwas besser zur Schreibweise der Aufgabenstellung passt folgendes: Wir wählen  $E$  als die Menge der  $n$ -dimensionalen Einheitsvektoren und  $\mathcal{I}$  als die Menge der zulässigen Lösungen des Rucksackproblems, also

$$\mathcal{I} = \{x \in \{0, 1\}^n : a^T x \leq b\}.$$

Wir bekommen folgendes Maximierungsproblem:

$$\max_{x \in \mathcal{I}} c^T x.$$

(Da  $\mathcal{I} \subseteq 2^E$  gelten muss, definieren wir eine Menge  $M$  von  $n$ -dimensionalen Einheitsvektoren und einen Vektor  $v \in \{0, 1\}^n$  als "gleich", wenn  $v = \sum_{e_i \in M} e_i$  gilt.)

2. Das gewählte Unabhängigkeitssystem ist kein Matroid, da die Basen unterschiedliche Kardinalität haben können. Wählen wir z.B.  $n = 3$ ,  $a = (2, 1, 1)$  und  $b = 2$ , wären  $x_1 = \{1\} \cong (1, 0, 0)$  und  $x_2 = \{2, 3\} \cong (0, 1, 1)$  maximal zulässige Lösungen (Basen von  $E$ ), aber  $|x_1| < |x_2|$ .
3. Zum Bestimmen einer zulässigen Lösung kann der Gewichtslichtengreedy benutzt werden. Wir definieren dazu  $w_i = \frac{c_i}{a_i}$ . Die sortierten Werte sind in folgender Tabelle angegeben:

Die Greedy-Lösung ist  $x = (1, 0, 0, 1, 1)^T$  mit Zielfunktionswert 9.

Die Greedy-Lösung ist nicht optimal, denn es existiert eine Lösung  $x = (0, 0, 1, 1, 1)^T$  mit Zielfunktionswert 10.

$i$	$c_i$	$a_i$	$w_i$
4	3	1	3
1	2	1	2
5	4	2	2
3	3	2	$\frac{3}{2}$
2	4	3	$\frac{4}{3}$

## Hausübungen

### Aufgabe 4. (Optimierung über Matroide)

(2+3 Punkte)

Gegeben sei eine Menge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sei  $\mathcal{I}$  die Menge der (über  $\mathbb{R}$ ) affin unabhängigen Teilmengen von  $S$ .

- (i) Weisen Sie nach, dass  $(S, \mathcal{I})$  ein Matroid ist.
- (ii) Es sei nun

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Lösen Sie das kombinatorische Optimierungsproblem

$$\max_{X \in \mathcal{I}} \left\{ \sum_{x \in X} x_1^2 x_3 \right\}.$$

### Lösung:

- (i) Die Menge  $\mathcal{I}$  ist ein Unabhängigkeitssystem, da jede Teilmenge einer Menge affin unabhängiger Vektoren ebenfalls affin unabhängig ist.

Ferner wissen wir aus der Linearen Algebra, dass jede Basis einer Menge affin unabhängiger Vektoren dieselbe Kardinalität hat.

Damit sind die Matroideigenschaften für  $(S, \mathcal{I})$  nachgewiesen.

- (ii) Da nach Aufgabenteil (i)  $(S, \mathcal{I})$  ein Matroid ist, liefert der Algorithmus *Greedy-Max* eine Optimallösung:

Sei  $w : S \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_1^2 \cdot x_3$ .

Zunächst sind die Elemente von  $S$  geeignet zu sortieren. Dies ergibt

$i$	$s_i$	$w(s_i)$
1	$(2, 0, 1)^T$	4,
2	$(-1, 0, 4)^T$	4,
3	$(1, 0, 2)^T$	2,
4	$(-1, 1, 1)^T$	1,
5	$(1, 1, 0)^T$	0
6	$(1, 0, -2)^T$	-2

Wir starten mit  $I = \emptyset$ .

Dann ist  $I \cup s_1 \in \mathcal{I}$ , da es sich offensichtlich um eine affin unabhängige Menge handelt. Folglich setzen wir  $I = \{s_1\}$ .

Die Vektoren  $s_1$  und  $s_2$  sind verschieden und daher affin unabhängig. Also fügen wir  $s_2$  zu  $I$  hinzu, das heißt  $I = \{s_1, s_2\}$ .

Die Vektoren  $s_1, s_2$  und  $s_3$  sind affin abhängig, da sie auf einer Geraden liegen. Folglich bleibt  $I$  unverändert.

Der Vektor  $s_4$  liegt offensichtlich nicht auf der Geraden durch  $s_1$  und  $s_2$ . Daher sind  $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_4$  affin unabhängig und wir erweitern  $I$  um  $s_4$ .

Da  $w(s_5) = 0$  gilt, kann der Algorithmus an dieser Stelle beendet werden.

Die Optimallösung  $\{s_1, s_2, s_4\}$  hat den Zielfunktionswert  $4 + 4 + 1 = 9$ .

**Aufgabe 5.** (Kreisaxiome und Basisaxiome)

(4+4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden beiden Sätze:

1. **Satz 8.10:** Sei  $E$  endlich und  $\mathcal{C} \subseteq 2^E$  eine Mengenfamilie, die (C1), (C2) und (C3) erfüllt. Sei  $\mathcal{I} := \{I \subseteq E : I \text{ enthält kein Element von } \mathcal{C}\}$ , dann ist  $(E, \mathcal{I})$  ein Matroid und  $\mathcal{C}$  sein Kreissystem.
2. **Satz 8.14:** Sei  $E$  endlich und  $\mathcal{B} \subseteq 2^E$  eine Mengenfamilie, die (B1) und (B2) erfüllt. Sei  $\mathcal{I} := \{I \subseteq E : \exists B \in \mathcal{B} \text{ und } I \subseteq B\}$ , dann ist  $(E, \mathcal{I})$  ein Matroid und  $\mathcal{B}$  sein Basissystem.

**Lösung:**

1. Aufgrund von (C1) enthält  $\emptyset$  kein Element von  $\mathcal{C}$ . Damit gilt  $\emptyset \in \mathcal{I}$  und damit ist (I1) erfüllt.

Falls  $I$  kein Element von  $\mathcal{C}$  enthält und  $I' \subseteq I$ , enthält auch  $I'$  kein Element von  $\mathcal{C}$ , womit (I2) gilt.

Um (I3) zu beweisen, wählen wir  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  mit  $|I_1| < |I_2|$ . Angenommen, (I3) gilt nicht für  $I_1, I_2$ . Es existiert  $I_3 \in \mathcal{I}$  mit  $I_3 \subseteq I_1 \cup I_2$  und  $|I_1| < |I_3|$ . Wir wählen  $I_3$  derart, dass  $|I_1 \setminus I_3|$  minimal ist. Da (I3) nicht gilt, existiert  $e \in I_1 \setminus I_3$ . Sei  $f \in I_3 \setminus I_1$  und  $T_f = (I_3 \cup \{e\}) \setminus \{f\}$ . Dann gilt  $T_f \subseteq I_1 \cup I_2$  und  $|I_1 \setminus T_f| < |I_1 \setminus I_3|$ . Es folgt  $T_f \notin \mathcal{I}$  und  $C_f \subseteq T_f$  mit  $C_f \in \mathcal{C}$ . Da  $C_f \subseteq (I_3 \cup \{e\}) \setminus \{f\}$  gilt  $f \notin C_f$ . Weiter gilt  $e \in C_f$ , sonst wäre  $C_f \subseteq I_3$ , was  $I_3 \in \mathcal{I}$  widerspricht.

Sei  $g \in I_3 \setminus I_1$ . Falls  $C_g \cap (I_3 \setminus I_1) = \emptyset$ , wäre  $C_g \subseteq ((I_1 \cap I_3) \cup \{e\}) \setminus \{g\} \subseteq I_1$ , ein Widerspruch. Deshalb existiert  $h \in C_g \cap (I_3 \setminus I_1)$  und  $C_h \neq C_g$  da  $h \notin C_h$ . Nun ist  $e \in C_g \cap C_h$  und damit impliziert (C3), dass ein  $C \in \mathcal{C}$  existiert mit  $C \subseteq (C_g \cup C_h) \setminus \{e\}$ . Da aber  $C_g \subseteq I_3 \cup \{e\}$  und  $C_h \subseteq I_3 \cup \{e\}$  gilt  $C \subseteq I_3$ , was ein Widerspruch ist. Damit gilt (I3) und  $(E, \mathcal{I})$  ist ein Matroid.

Dass  $\mathcal{C}$  das Kreissystem des Matroids ist, folgt aus der paarweisen Äquivalenz von

- (i)  $C$  ist ein Kreis,
  - (ii)  $C \notin \mathcal{I}$  und  $\forall x \in C : C \setminus \{x\} \in \mathcal{I}$ ,
  - (iii)  $\exists C' \in \mathcal{C} : C' \subseteq C$  aber  $C' \not\subseteq C$ ,
  - (iv)  $C \in \mathcal{C}$ .
2. Da  $\mathcal{B}$  Axiom (B1) erfüllt, erfüllt  $\mathcal{I}$  Axiom (I1).

Sei  $I \in \mathcal{I}$ , dann ist  $I \subseteq B$  für ein  $B \in \mathcal{B}$ . Für  $I' \subseteq I$  gilt  $I' \subseteq B$  und somit  $I' \in \mathcal{I}$ . Damit erfüllt  $\mathcal{I}$  Axiom (I2).

Angenommen, Axiom (I3) gilt nicht für  $\mathcal{I}$ . Dann gibt es  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  mit  $|I_1| < |I_2|$ , so dass für alle  $e \in I_2 \setminus I_1$  gilt  $I_1 \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ . Nach Definition gibt es  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  mit  $I_1 \subseteq B_1$  und  $I_2 \subseteq B_2$ . Sei  $B_2$  so gewählt, dass  $|B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$  minimal ist. Da  $I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$  für alle  $e \in I_2$  ist, gilt

$$I_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1. \quad (1)$$

Wir nehmen an,  $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) \neq \emptyset$  und  $x \in B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)$ . Nach (B2) existiert  $y \in B_1 \setminus B_2$  mit  $(B_2 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ . Aber dann gilt

$$|((B_2 \setminus \{x\}) \cup \{y\}) \setminus (I_2 \cup B_1)| < |B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|,$$

was ein Widerspruch zur Wahl von  $B_2$  ist. Deshalb gilt  $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) = \emptyset$ ,  $B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus B_1$  und wegen (1) auch

$$B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1. \quad (2)$$

Als nächstes zeigen wir, dass  $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2) = \emptyset$ . Falls nicht, dann existiert  $x \in B_1 \setminus (I_1 \cup B_2)$  und ein  $y \in B_2 \setminus B_1$  mit  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ . Da  $I_1 \cup \{y\} \subseteq (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$  gilt  $I_1 \cup \{y\} \in \mathcal{I}$ . Weiterhin

gilt  $y \in B_2 \setminus B_1$  und wegen (2) auch  $y \in I_2 \setminus I_1$ , was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist, dass Axiom (I3) nicht gilt. Wir folgern  $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2) = \emptyset$ ,  $B_1 \setminus B_2 = I_1 \setminus B_2$  und

$$B_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus I_2. \quad (3)$$

Nach Lemma 8.12 gilt  $|B_1| = |B_2|$  und  $|B_1 \setminus B_2| = |B_2 \setminus B_1|$ . Aus (2) und (3) folgt  $|I_1 \setminus I_2| \geq |I_2 \setminus I_1|$  und schließlich  $|I_1| \geq |I_2|$ , was ein Widerspruch zur Annahme  $|I_1| < |I_2|$  ist. Damit ist  $(E, \mathcal{I})$  ein Matroid und  $\mathcal{B}$  sein Basissystem.

#### Aufgabe 6. (Schnitt von Matroiden)

(1+1+1+1 Punkte)

Es seien  $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$  und  $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$  zwei verschiedene Matroide, und es sei  $M_3 = (E, \mathcal{I}_3)$  mit  $\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ .  $r_i$  sei für  $i \in \{1, 2, 3\}$  die Rangfunktion von  $M_i$ . Welche der folgenden Aussagen gelten dann in jedem Fall?

- (a) Für alle  $X \subseteq E$  und  $x, y \in E$  gilt: Wenn  $r_3(X \cup \{x\}) = r_3(X \cup \{y\}) = r_3(X)$  gilt, so gilt auch  $r_3(X \cup \{x, y\}) = r_3(X)$ .
- (b) Es gilt  $r_3(E) < \max\{r_1(E), r_2(E)\}$ .
- (c) Es gibt ein  $X \subseteq E$ , für das  $r_3(X) < \max\{r_1(X), r_2(X)\}$  gilt.
- (d) Für jedes  $X \in \mathcal{I}_3$  und  $x \in E \setminus X$  gibt es  $y, z \in X$ , so dass  $X \cup \{x\} \setminus \{y, z\} \in \mathcal{I}_3$ .

Falls eine Aussage stimmt, beweisen Sie sie kurz. Wenn sie falsch ist, widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

#### Lösung:

- (a) Falsch. Die Menge der Matchings in bipartiten Graphen kann als Schnitt von zwei Matroiden geschrieben werden. Wenn  $X$  dann nur aus einer Kante  $e$  besteht und  $x$  und  $y$  zu  $e$  adjazente Kanten sind, so dass  $e, x$  und  $y$  einen Weg der Länge drei bilden, hat man ein Gegenbeispiel.
- (b) Falsch. Betrachte  $E = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$  und  $\mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}\}$ .
- (c) Wahr. Wäre dies nicht der Fall, dann müsste für alle  $X \subseteq E$  somit  $r_1(X) = r_2(X)$  gelten, was hieße, dass  $(E, \mathcal{I}_1)$  und  $(E, \mathcal{I}_2)$  identisch sind.
- (d) Wahr. Ein Element  $x \in E \setminus X$  kann mit  $X$  nur höchstens zwei Kreise schließen (weil  $(E, \mathcal{I}_3)$  Schnitt von zwei Matroiden ist), daher reicht die Herausnahme von höchstens zwei Elementen, um die Kreise wieder zu zerstören.

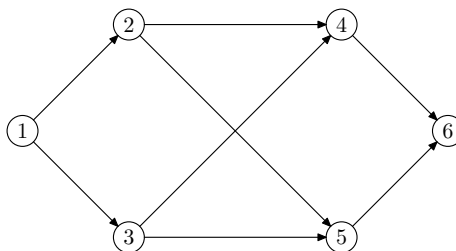
#### Aufgabe 7. (Programmieraufgabe: Minimalkosten-Fluss-Problem als lineares Programm) (4 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Einführung in das Python-Modul `gurobipy`, das verwendet werden kann, um lineare Programme zu lösen. Auf den Rechnern im Department Mathematik ist Gurobi bereits installiert. Falls Sie es bei sich zuhause installieren möchten, finden Sie hierzu eine Anleitung [Installationstutorial\\_Gurobi.pdf](#) auf Studon.

Laden Sie die Datei `ProgAufgabe09.py` aus Studon herunter und fügen Sie sie in ihr PyCharm ein. In dieser Aufgabe implementieren Sie das lineare Programm zum Christkindlesmarkt aus Übungsblatt 8, Aufgabe 1.

1. Mit `import gurobipy as grb` wird Gurobi in Python eingebunden. Gurobi-Modelle werden sukzessive aufgebaut. Hierfür verwenden wir zunächst die folgenden 5 Python-Befehle:
  - Mit `model = grb.Model("My first LP")` wird ein neues Gurobi-Modell erstellt. Die Angabe eines Namens ist dabei optional.
  - Mit `var1 = model.addVar(lb = -2, ub = 4.2, obj = 3.5)` wird eine neue Gurobi-Variable (nicht mit Python-Variablen verwechseln) in das Modell eingefügt und in der Python-Variable `var1` abgespeichert. In unserem Fall hat die Variable die untere Schranke -2, die obere Schranke 4.2 und den Zielfunktionskoeffizient 3.5. (Diese 3 Parameter sind alle optional. Wird die jeweilige Schranke weggelassen, ist die Variable in die Richtung unbeschränkt. Wird `obj` weggelassen, ist der Zielfunktionskoeffizient der Variable 0.)

- Mit `model.addConstr(var1 + 2*var2 - 0.5*var3 == 5)` wird die Nebenbedingung  $x_1 + 2 \cdot x_2 - 0.5 \cdot x_3 = 5$  zum Modell hinzugefügt.
  - Mit `model.update()` werden zuvor getätigte Änderungen erst tatsächlich übernommen. Daher sollte dies auf jeden Fall nach dem Hinzufügen der Variablen und vor dem Hinzufügen der Nebenbedingungen stattfinden (sonst sind die Variablen beim Hinzufügen der Nebenbedingungen unbekannt). Prinzipiell kann man nie zu viel updaten, allerdings kostet das Updaten viel Rechenzeit.
  - Zuletzt brauchen Sie die Methode `model.optimize()`, welche die Optimierung (standardmäßig Minimierung) startet.
2. Nutzen Sie diese 5 Befehle, um folgendes Min-Cost-Flow-Problem aus Blatt 8, Aufgabe 1 in Python als LP zu implementieren und zu lösen. Gegeben ist der Graph



mit den Kapazitäten und Kosten

Kante	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(4,6)	(5,6)
Kapazität (in Tonnen)	15	13	10	10	8	9	9	17
Kosten (in Euro)	100	150	150	130	80	80	100	120

Der Bedarf an Knoten 1 ist -20, der an Knoten 2 ist 5, der an Knoten 5 ist -5 und der an Knoten 6 ist 20. In der Datei `ProgAufgabe09.py` ist bereits etwas Beispielcode.

Wenn Gurobi dann sowas ausgibt, wie `Optimal objective 6.190000000e+03` haben sie alles richtig gemacht. Wenn dagegen eine andere Zahl oder eine der Meldungen `Infeasible Model` (unzulässiges Modell) oder `Unbounded Model` (unbeschränktes Modell) ausgegeben wird, geht es an die Fehlersuche (oft Vorzeichenfehler in den Koeffizienten oder Nebenbedingungen).

Tipp fürs debuggen: `var1.X` ist der Wert der Variable `var1` in der Optimallösung (natürlich erst auslesbar, wenn `model.optimize()` ausgeführt wurde).

### Lösung:

Die Musterlösung der Programmieraufgabe finden Sie im StudOn in der Datei `ProgAufgabe09_Loesung.py`.

### Aufgabe 8. (Weihnachtsrätsel)

(1 Punkte)

Platzieren Sie eine Lichterkette auf dem Weihnachtsbaum (siehe Abb. 1), so dass ein Hamiltonkreis entsteht, der jede Kerze genau einmal besucht.

### Lösung:

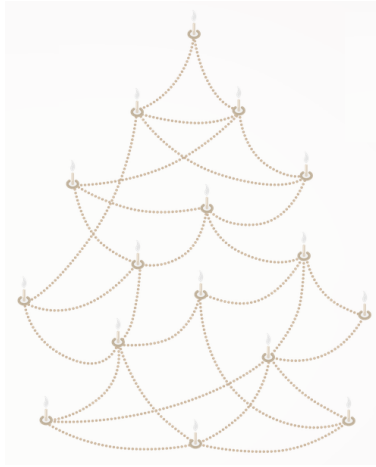


Abbildung 1: Weihnachtsrätsel

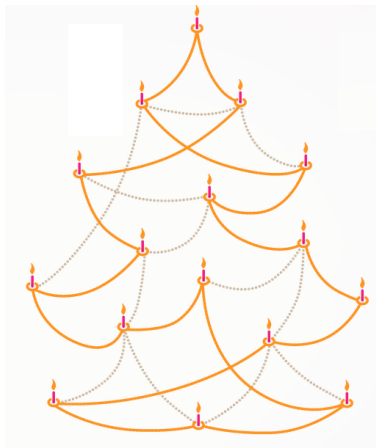


Abbildung 2: Lösung des Weihnachtsrätsels

Gruppe 1: Abgabe der Hausaufgaben am 09.01.2018 in der Übung.  
 Gruppe 2+3: Abgabe der Hausaufgaben am 10.01.2018 in der jeweiligen Übung.

**Wir wünschen frohe Weihnachten und  
 einen guten Rutsch in ein optimales Jahr 2018!**