Mathe C4 – Merkhilfe

Marco Ammon

22. Juli 2018

Definitionen (Skript, Kästchenaufgaben)

$$E(X-a)^2 = Var(X) + (E(X)-a)^2$$

Seien X, Y ZV, dann gilt:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Kov(X,Y)$$

Seien X, Y stochastisch unabhängig, dann gilt:

$$Kov(X,Y) = E(X \cdot Y) - (E(X) \cdot E(Y))$$
$$P^{(X+Y)}(X+Y \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{\mathbb{R}} f^{X,Y}(x, a-x)\ dx\ da$$

Seien X, Y reellwertige ZV mit gemeinsamer Dichte $f^{X,Y}$, dann gilt:

$$Kov(X,Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x-E(X))(y-E(Y)) f^{(X,Y)}(x,y)\ dy\ dx$$

Sei Z eine ZV, $Y \coloneqq g(Z)$ ebenfalls, dann gilt:

$$f^Y(y) = f^Z(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d\ g^{-1}(y)}{dy}$$

Regressionsgerade

$$g(x) = \frac{s_{xy}}{s_x^2} x + (\overline{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \overline{x})$$

Integration mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
\Phi &: H \to G \\
H &\coloneqq [0,1) \times [0, 2\pi) \\
\Phi(r,\phi) &= \begin{pmatrix} r \ \cos\phi \\ r \ \sin\phi \end{pmatrix} \\
det(J\Phi(r.\phi)) &= r \\
\int_G f(x,y)\ dG &= \int_H f(\underbrace{r\ \cos\phi}_{x}, \underbrace{r\ \sin\phi}_{y}) \cdot |r|\ dH
\end{aligned}$$

Dichten

diskret

Name	$f(k)$	$F(x)$	$E(X)$	$Var(X)$	$X+Y$
Laplace	$\frac{1}{N}$		$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	
Bernoulli $B(p)$	$f(1) = p$		p	$p(1-p)$	$B(2;p)$
Binomial $B(n;p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$	$B(n_X + n_Y; p)$
Hypergeo. $H(N;K;n)$	$\binom{K}{k} \frac{\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$		$n\frac{K}{N}$	$n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$	
Poisson $\pi(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$Q(n+1;\lambda)$	λ	λ	$\pi(\lambda_X + \lambda_Y)$
$geo^+(p;k)$	$p \cdot q^{k-1}$	$1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$nb^+(2;p)$
$geo^0(p;k)$	$p \cdot q^k$	$1-(1-p)^{\lfloor x+1 \rfloor}$	$\frac{1-p}{p}$	$\sim$	
Neg. Bin. $nb^+(r;p;k)$	$\binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$		$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$nb^+(r_X + r_Y; p)$
$nb^0(r;p;k)$	$\binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k$		$\frac{r(1-p)}{p}$	$\sim$	

stetig

Name	$f(x)$	$F(x)$	$E(X)$	$Var(X)$	$X+Y$
Gleich $\mathcal{R}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}1_{(a,b)}(x)$	$0 < \frac{x-a}{b-a} < 1$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
$Exp(\alpha)$	$\alpha e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x)$	$(1-e^{-\alpha x})1_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\Gamma(\alpha;2)$
$\mathcal{N}(0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x)$	0	1	$\mathcal{N}(0;2)$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	μ	σ^2	$\mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y; \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$
$\gamma(\alpha,\nu)$	$\frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x)$		$\frac{\nu}{\alpha}$	$\frac{\nu}{\alpha^2}$	$\Gamma(\alpha; \nu_X + \nu_Y)$

Bei gemeinsamer Dichte $f^{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ Randdichte $f^{X_1} = \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)dx_2$

Gekoppelte Dichten: $f(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq f_1(x_1) \cdot \cdots \cdot f_n^{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1};x_n)$

Normalverteilung im $\mathbb{R}^n$ und Kovarianzen

Standardnormalverteilung

$$f^X(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $g(x) = a + Ax$, und $Y := g(X)$, wobei X standardnormalverteilt im $\mathbb{R}^n$ ist, dann gilt

$$E(Y_i) = a_i$$
$$\text{Kovarianzmatrix } K = AA^T$$

Ist $Y \sim \mathcal{N}(a, K)$ und $Z = b + BY$, dann folgt $Z \sim \mathcal{N}(b + Ba, BKB^T)$

Stochastische Unabhängigkeit der Y_i, wenn K Diagonalmatrix

Transformationen

$$\begin{aligned} &Y = a + bX \\ \Rightarrow &F^Y(y) = F^X(\frac{y-a}{b}) \\ \Rightarrow &f^Y(y) = \frac{1}{b} f^X(\frac{y-a}{b}) \end{aligned}$$

insbesondere für $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $F^Y(y) = \Phi(\frac{y-a}{b})$

Approximationen

Poisson-Approximation für Binomialverteilung

$\lambda = np$

Normal-Approximation für Binomialverteilung

$$F^{S_n}(x) \approx \Phi(\frac{x-a}{\sigma})$$

mit $a = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Zufällige Summen

$Im(Y) = \mathbb{N}_0, X_i$ identisch verteilt und stochastisch unabhängig: $S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$

$$\begin{aligned} P^{X|Y}(B|y) = P(X \in B|Y = y) &= \frac{P[(x \in B) \cap (Y = y)]}{P(Y = y)} \\ E(S) &= E(Y) \cdot E(X_1) \\ Var(S) &= E(Y) \cdot Var(X_1) + Var(Y) \cdot (E(X_1))^2 \end{aligned}$$

Gesetze der großen Zahlen

Chebychew-Markov-Ungleichung

$$\begin{aligned} P(|Y| \geq \epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon^r} E|Y|^r \\ P(|Y - E(Y)| \geq \epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} Var(Y) \end{aligned}$$

Zentraler Grenzwertsatz für n stoch. un. und id. veteilte X_i

$$\frac{S_n - E(S_n)}{Str(S_n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot E(X_1)}{\sqrt{n} Str(X_1)} \to Y \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

Markov-Ketten

Gleichgewichtsverteilung π: $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$ und $\pi = \pi P$, also π Eigenvektor zum Eigenwert 1 von P^T, ergo $\pi = \text{Kern}(P^T - E_n)$

Hinreichendes Kriterium für Irreduzibilität und Aperiodizität: $\exists m \in \mathbb{N} : P^m$ enthält nur positive Werte $\Rightarrow$ Konvergenz gegen Gleichgewichtsverteilung π (falls existent)

Schätzer

Punktschätzungen

Likelihood-Funktion für Stichproben $x_1, \ldots, x_n$, gesucht Parameter θ der Wahrscheinlichkeit P (analog für Dichte f):

$$L(x_1; \ldots, x_n; \theta) \coloneqq \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i; \theta)$$

Dann $\max_\theta L(x_1; \ldots; x_n; \theta)$ gesucht (klassisch über Ableitung)

Konfidenzintervalle

Schätzung von μ der Normalverteilung bei bekannter Varianz

$$\overline{X} - \zeta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \zeta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

mit ζ Perzentil der Standardnormalverteilung aus Formelsammlung

Schätzung von μ der Normalverteilung bei geschätzter Varianz

$$\overline{X} - t_{1-\frac{a}{2};n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{1-\frac{a}{2};n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

mit $S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ („empirische Varianz“) und t Perzentil der Student-T-Verteilung mit Freiheitsgrad $n-1$