Zusammenfassung Mathe C3

von Marco Ammon

- Extremstellen
  - Hinreichende Kriterien
    - $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist lok. Maximalstelle
    - $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist lokale Minimalstelle
  - Notwendige Kriterien
    - x_0 ist lokale Extremstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
    - x_0 ist lokale Maximalstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \leq 0$
    - x_0 ist lokale Minimalstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \geq 0$
  - Analog mit Hesse-Matrix im mehrdimensionalen Fall
  - Definitheit einer Matrix: Vorzeichen aller λ_i
  - Minimierung/Maximierung einer Funktion f mit Nebenbedingungen durch Lagrange-Formalismus:
    - Nebenbedingung umformen zu $g(x, y, ...) = 0$ (für mehr Nebenbedingungen auch mehr λ einführen!)
    - Gradienten von f und g berechnen

$$\begin{aligned} \nabla f + \lambda \nabla g &= 0 \\ g(x, y, ...) &= 0 \end{aligned}$$

    - Auflösen
  - Satz über implizite Funktionen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2, f(x_0, y_0) = 0, \partial_2 f(x_0, y_0) \neq 0$, dann existiert $x \mapsto y(x)$ mit $f(x, y(x)) = 0$, $y_0 = y(x_0)$ und $y'(x) = -\frac{\partial_1 f(x,y(x))}{\partial_2 f(x,y(x))}$
  - Satz von der inversen Abbildung f: Sei die Jacobi-Matrix von f invertierbar ($\det \neq 0$), dann gibt es eine Umgebung, in der f bijektiv ist.

- Parametrisierungen
  - Parameterdarstellung Kreis: $\vec{\gamma} : [0, 2\pi], \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos\, t \\ \sin\, t \end{pmatrix}$
  - Bogenlänge auf Intervall $[a, b]$: $|\Gamma| = \int_a^b ||\vec{\gamma}'(t)||dt$
  - (Um-)Parametrisierung u nach der Bogenlänge: Es muss gelten $||\vec{\gamma}'(t)|| = 1$, also $u'(t) = \frac{1}{||\vec{\gamma}'(u(t))||}$
  - Krümmung $\kappa(t) = \frac{1}{Radius(t)} = ||\vec{\gamma}''(t)||$
  - Kurvenintegral erster Art (skalarwertige Funktion f): $\int_\Gamma f ds := \int_I f(\vec{\gamma}(t))||\vec{\gamma}'(t)||dt$
  - Kurvenintegral zweiter Art (vektorwertige Funktion F): $\int_\Gamma \vec{F} \bullet d\vec{s} := \int_I \langle \vec{F}(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma}'(t) \rangle dt$
  - Flächenintegral erster Art (skalarwertige Funktion f): $\int_M f do := \int_M f(\vec{\gamma}(s,t))||\partial_1 \vec{\gamma}(s,t) \times \partial_2 \vec{\gamma}(s,t)||ds\ dt$
  - Flächenintegral zweiter Art (vektorwertige Funktion F): $\int_M F \bullet d\vec{o} := \int_M \langle \vec{F}(\vec{\gamma}(s,t)),\ \partial_1 \vec{\gamma}(s,t) \times \partial_2 \vec{\gamma}(s,t) \rangle ds\ dt$
  - Umrechnung kartesisch zu Polarkoordinaten: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
  - Umrechnung Polarkoordinaten zu kartesischen: $x = r\, \cos\, \phi$, $y = r\, \sin\, \phi$

- Optimierung:
  - Konvexität: $\forall x, y \in M\ \forall \alpha \in [0, 1] : \alpha \vec{x} + (1 - \alpha)\ \vec{y} \in M$ (anschaulich: Die Verbindung beliebiger Punkte aus M muss auch in M liegen, analog für Funktionen)

- f konvex $\Leftrightarrow Hf(\vec{x})$ positiv semidefinit $\forall \vec{x}$
- f konvex: Jede lokale Minimalstelle ist auch globale Minimalstelle (und haben alle den gleichen Wert).
- Quadratisches Optimierungsproblem: $f(\vec{x}) := \frac{1}{2}\langle A\vec{x}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{x}\rangle (+c) \to min$ wird gelöst durch $\vec{x}_* = -A^{-1}\vec{b}$ falls A symmetrisch positiv definit
- Gradientenverfahren: $\vec{x}_{m+1} := \vec{x}_m - \alpha_m \nabla f(\vec{x}_m)$ mit optimaler Schrittweite $\alpha_m := \frac{\langle \nabla f(\vec{x}_m), \nabla f(\vec{x}_m)\rangle}{\langle Hf(\vec{x}_m)\nabla f(\vec{x}_m), \nabla f(\vec{x}_m)\rangle}$ (mit $\nabla f(\vec{x}_m) = A\vec{x}_m + \vec{b}$ im quadratischen Fall)
- Lineare Programmierung:
  * Umwandeln in Standardform:
    · Maximierung durch Multiplizieren mit -1 in Minimierung umwandeln: $f(\vec{x})\langle \vec{c}, \vec{x}\rangle \to$min
    · $\geq$-NB durch Multiplizieren mit -1 in $\leq$-NB umwandeln
    · Ungleichungen durch Einführen von Schlupfvariablen in Gleichungen umwandeln
    · x_i ohne bisherige ≥ 0-NB umwandeln in $x_i^+ - x_i^-$ mit beiden ≥ 0
    · Lineare Unabhängigkeit der NB sicherstellen
  * Basislösung: Nichtbasisvariablen auf 0 setzen, dann gilt $A\vec{x} = A_B\vec{x}_B + A_N\vec{x}_N = \vec{b}$. Basislösung ist dann $\vec{x}_N = \vec{0}, \vec{x}_B = A_B^{-1}\vec{b}$
  * Basislösung zulässig wenn alle Komponenten ≥ 0
  * Aufstellen des Tableaus: $\left(\begin{array}{c|c} \vec{c}^T - \vec{c}_B^T A_B^{-1} A & -f(\vec{x}) \\ \hline A_B^{-1} A & \vec{x}_B \end{array}\right)$, falls Schlupfvariablen zulässige Basislösung am Anfang $\left(\begin{array}{c|c} \vec{c}^T & -f(\vec{x}) \\ \hline A & \vec{b} \end{array}\right)$
  * Solange in oberster Zeile Werte < 0 vorhanden: Wähle mit Quotientenregel (kleinster Quotient aus Wert rechts und Wert > 0 in Spalte) Pivotelement. Falls nur Werte ≤ 0 in ausgewählter Spalte, dann unbeschränkte Lösung!
  * Gauß-Umformungen, damit in ausgewählter Spalte ein Einheitsvektor steht und oben eine 0.
  * Am Ende steht in Spalte rechts die Lösung, mit den einzelnen Komponenten in Reihenfolge der zugehörigen Einheitsvektoren.

- Fixpunktiterationen
  - Fixpunkt: $\phi(x) = x$
  - Fixpunktiteration: $x_{n+1} := \phi(x_n)$
  - Banach-Raum $(V, ||\cdot||)$: vollständig (jede Cauchy-Folge konvergiert) (Beispiel: $\mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm)
  - Hilbert-Raum: Banach-Raum und Norm erzeugt durch Wurzel aus Skalarprodukt (Beispiel: $\mathbb{R}^n$ mit Euklidischer Norm)
  - Kontraktion: $(V, ||\cdot||)\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subseteq V$, $\phi : M \to V$ mit Konstante $k < 1$, so dass $\forall x, y \in M : ||\phi(x) - \phi(y)|| \leq k||x - y||$ (Bilder liegen näher zusammen als Urbilder)
  - Falls $V = \mathbb{R}$, $k := \sup_{x \in M} |\phi'(x)| < 1$
  - Banach'scher Fixpunktsatz: Sei $(V, ||\cdot||)$ Banach-Raum, $\emptyset \neq M \subseteq V$ abgeschlossene Teilmenge, $\phi : M \to M$ Kontraktion, dann hat ϕ genau einen Fixpunkt, den Grenzwert der Fixpunktiteration von ϕ.
  - Fehlerabschätzungen: $||x_{n+1} - x_*|| \leq k||x_n - x_*||$, $||x_n - x_*|| \leq k^n||x_0 - x_*||$, $||x_n - x_*|| \leq \frac{k}{1-k}||x_n - x_{n-1}||$

- Umwandlung Nullstellenproblem zu FP-Problem: $\phi(x) = \alpha f(x) + x$ mit $\alpha := -\frac{1}{f'(x_*)}$
  Verbesserung: $\phi(x) = h(x)f(x) + x$ mit $h(x) := -\frac{1}{f'(x)}$ (Newton-Verfahren)
- Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$: $\vec{x}_{n+1} := \vec{x}_n - [(Jf)(\vec{x}_n)]^{-1} f(\vec{x}_n)$
- Jacobi-Verfahren: $x_{m+1,i} := \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus i} a_{ij}\ x_{m,j}) \forall i = 1,...,n$ (alle x_i auf linke Seite bringen)
- Gauß-Seidel-Verfahren: wie Jacobi, aber für alle $j < i$ den neu berechneten Wert $x_{m+1,j}$ verwenden

- Gewöhnliche Differentialgleichungen:
  - explizit: Wenn höchste Ableitung allein auf linker Seite steht
  - autonom: t kommt nur als Parameter der gesuchten Funktion (und ihrer Ableitungen vor)
  - Ordnung: Höchste Ableitung
  - System: Mehrere DGLs (lassen sich zu skalarer, vektorieller DGL zusammenfassen)
  - Anfangswertproblem: Wert am Anfang gegeben (n Werte bei Ordnung n notwendig)
  - Umwandlung skalarer DGL höherer Ordnung in 1. Ordnung: $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t))$
    zu $\vec{y}_{\text{neu}} := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ und $\vec{y}'_{\text{neu}}(t) = \tilde{f}(t, \vec{y}_{\text{neu}})$ für $t \mapsto \vec{y}_{\text{neu}}$
  - Lösungsverfahren für skalare DGL 1. Ordnung:
    * Trennung der Variablen: Funktion und Ableitungen auf eine Seite bringen, dann integrieren, dann auflösen zur Funktion
    * Substitution:
      · Typus $y'(t) = f(\frac{y(t)}{t})$: $u(t) := \frac{y(t)}{t}$
      · Typus $y'(t) = f(a\ t + b\ y(t) + c)$: $u(t) := a\ t + b\ y(t) + c$
  - Lösungsverfahren für lineare skalare DGL 1. Ordnung $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$
    * Bestimmung der homogenen Lösung: Lösung durch Trennung der Variablen
    * Bestimmung der partikulären Lösung: Variation der Konstanten: $y_p(t) = y_h(t) \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{y_h(\tau)} d\tau$
    * $y(t) = y_p + c\ y_h$ mit c bestimmt durch AWP
  - Existenz und Eindeutigkeit von AWP:
    * Existenz: rechte Seite stetig (nach Existenzsatz von Peano)
    * Lipschitz-Stetigkeit: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in M : ||\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})|| \leq L||\vec{x} - \vec{y}||$ mit Konstante $L > 0$
    * Eindeutigkeit:
      · Satz von Picard-Lindelöf: Wenn $\vec{f}(t, \vec{x})$ Lipschitz-stetig in zweitem Argument und gleichmäßig stetig im ersten (L also unabhängig von t), dann gibt es genau eine Lösung (und diese ist stetig differenzierbar).
      · Abschwächung: Streifen $M := [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$ zu Zylinder $M := [t_0, T] \times K_R(\vec{y}_0)$, dann existiert Lösung eventuell nur noch auf kleinerem Intervall
      · Abschwächung mit lokaler Lipschitz-Stetigkeit
  - Lösungsverfahren für lineares DGL-System 1. Ordnung $y'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$:
    * Bestimmung der homogenen Lösung: Bestimmung der Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren, dann Fundamentalsystem: $\text{span}\{e^{\lambda_1 t}\vec{q}_1, ..., e^{\lambda_n t}\vec{q}_n\}$
    * Komplexe Lösung: $y_1(t) = e^{(a+bi)t}(\vec{r} + \vec{s}i)$ umwandeln in $\vec{y}_{1,\text{reell}}(t) = (\vec{r}\ \cos bt - \vec{s}\ \sin bt)e^{at}$ und $\vec{y}_{2,\text{reell}}(t) = (\vec{s}\ \cos bt + \vec{r}\ \sin bt)e^{at}$

    - Bestimmung eines Hauptvektors v_{k+1}: $(A - \lambda E_n)\vec{v}_{k+1} = \vec{v}_k$
    - Lösung im nicht-diagonalisierbaren Fall (für jeden Eigen-/Hauptvektor): $\vec{y}(t) := e^{\lambda t}(\vec{v}_m + t\vec{v}_{m-1} + \frac{t^2}{2!}\vec{v}_{m-2} + ...)$
    - Bestimmung der partikulären Lösung: $\sum_{i=1}^{n} \vec{y}_i(t)c_i'(t) = \vec{b}(t)$, also $c_i'(t) = W(t)^{-1}\vec{b}(t)$, dann einsetzen in $W(t)\vec{c}(t)$ mit $W(t)$ Fundamentalmatrix
  - Lösungsverfahren für skalare DGL n. Ordnung: $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_0(t)y(t) = b(t)$
    - Homogene Lösung bestimmen: $p(\lambda)$ ist DGL mit Ableitungen als Potenzen der Eigenwerte. Dann ist für jeden Eigenwert λ_i mit algebraischer Vielfachheit r_i Teil des Fundamentalsystems: $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, ...$
    - Komplexe Lösungen: $y_{1,\text{reell}} = e^{at} \cos bt$, $y_{2,\text{reell}} = e^{at} \sin bt$
    - Bestimmung der partikulären Lösung: Ansatz der rechten Seite. Falls $b(t) = e^{kt}\sum_{j=0}^{m} b_j t^i$ gilt $y_p(t) = e^{kt}t^r \sum_{j=0}^{m} \alpha_j t^i$ mit k r-fache Nullstelle (auch 0), dann α_i durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

- Algebra:
  - (abel'sche) Gruppe: assoziativ , neutrales Element, inverse Elemente (, kommutativ) (Beispiel $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$, $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$ mit n prim)
  - Monoid: assoziativ, neutrales Element (Beispiel: $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$)
  - Halbgruppe: assoziativ
  - Ring: Menge M mit 2 Verknüpfungen, $(M, +)$ abel'sche Gruppe, $(M, \cdot)$ Halbgruppe, Distributiv. Erweiterung neutrales Element (Ring mit Einselement) und Kommutativität (Beispiel: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$)
  - Körper: kommutativer Ring mit Eins, jedes Element $\neq 0$ hat Inverses (Beispiel: $\mathbb{Q}$, aber nicht $\mathbb{Z}$)
  - Menge der Restklassen: $\mathbb{Z}_n$ (modulo n), $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ Restklassenring
  - $\mathbb{Z}_n^* := \{[i]_n | i \text{ teilerfremd } n\}$, $|\mathbb{Z}_n^*| = \phi(n)$
  - Prüfziffern: Fehlererkennung
    - Einzelfehlern wenn alle $[g_i]_n$ invertierbar (also $\text{ggt}(g_i, n) = 1$)
    - Vertauschungsfehlern: wenn alle $[g_i - g_j]_n$ invertierbar
    - Nachbarfehlern: wenn alle $[g_i - g_{i+1}]$ invertierbar
  - Euler'sche Phi-Funktion:
    - Primzahl: $\phi(p) = p - 1$
    - Primzahlpotenz: $\phi(p^k) = p^{k-1}\ (p - 1)$
    - Teilerfremde Zahlen: $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$
  - Untergruppe: Abgeschlossen bezüglich Operation und Inversenbildung
  - Ordnung: kleintes k so dass $a^k = 1$
  - G endliche Gruppe und U Untergruppe: $|U|$ teilt $|G|$
  - RSA: Nachricht x, $[e]_{\phi(n)} \cdot [d]_{\phi(n)} = [1]_{\phi(n)}$
    - Verschlüsselung: $x^e \bmod n$
    - Entschlüsselung: $x^d \bmod n$

- Trigonometrie
  - Einheitskreis: $cos(\alpha) = x$, $sin(\alpha) = y$
  - $tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$

- Additionstheoreme:
  - $sin(\alpha \pm \beta) = sin(\alpha) * cos(\beta) \pm cos(\alpha) * sin(\beta)$
  - $cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha) * cos(\beta) \mp sin(\alpha) * sin(\beta)$
- Symmetrien:
  - $sin(-x) = -sin(x)$
  - $cos(-x) = cos(x)$
  - $tan(-x) = -tan(x)$
- Verschiebungen:
  - $sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$
  - $cos(x + \frac{\pi}{2}) = -sin(x)$
- $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
- Wichtige Werte:

α in °	α in rad	$sin(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tan(\alpha)$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-

- Wichtige Integrale:

$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$ln\lvert x\rvert$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x)$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$2 \sin x \cos x = \sin(2x)$	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$