Zusammenfassung Mathe C1

Diverses) a=>b ⇔-AvB⇔-B=>-A; Potenzmenge = Menge aller Teilmengen; |P(M)|=$2^{|M|}$; kommutativ: a*b=b*a; assoziativ: (a*b)*c=a*(b*c); neutrales Element e: e*x=x*e=x; inv. Element y: x*y=y*x=e; Gruppe: (M,*): ass. und hat neut. El. und jed. x hat inv. El. (mit Komm. Abelsch); Untergruppen (in sich abgeschlossen (auch Inversenbildung); Köper: abel. Grup. Bzgl + und * sowie Distr.; total geordnet wenn: ≤ist vollst. Ordrel. und $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ und $c > 0 \wedge a < b \Rightarrow ac < bc$ Bruch => Dezimalzahl: modulo Nenner -> multiplizieren mit 10 (alternativ Basis); Jede rationale Zahl kann als abbrechende oder periodische Dezimalzahl dargestellt werden; $a^n b^n = (ab)^n$; $a^n a^m = a^{n+m}$; $(a^n)^m = a^{nm}$; $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$;

Relationen)
reflexiv:$\forall x: x\sim x$; symmetrisch:$\forall x,y: x\sim y \Rightarrow y\sim x$; transitiv:$\forall x,y,z: x\sim y \wedge y\sim z \Rightarrow x\sim z$; antisymmetrisch:$\forall x,y: x\sim y \ \wedge y\sim x \Rightarrow x = y$; alternativ:$\forall x,y: x\sim y \vee y\sim x$; Äquivalenzrelation:R,S,T; (totale) Ordnungsrelation: R,AS,T(,A); Partitionen: Zerlegung in disjunkte Teilmengen: (Äquivalenz-)Klassen: $\forall y: x\sim y$

Funktionen) Bild€Wertevorrat; g°f=g(f(x)); inj: f(x)=f(y)=>x=y; surj: Bild=Wertevorrat; bij: inj. und surj.

Permutationen)$|S_N|=|N|!$; Transposition: Vertauschen von nur 2 Elementen; Inversion: i<j und f(i)>f(j); Signum: $(-1)^{\text{Anzahl der Inversionen}}$; Ziehen m. Zur. mit. Reih.: $n^k$; o. Zur. mit Reih.:$\frac{n!}{(n-k)!}$; o. Zur. o.Reih.:$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; m. Zur. o. Reih.:$\binom{n+k-1}{k}$

Trigonometrie)
Einheitskreis: cos (a) = x; sin(a) = y; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;$\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(x) = \cos(x)$; $\tan(-1) = -\tan(x)$; $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$; $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$; $1 = sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha)$;

| a(°) | a(rad) | sin(a) | cos(a) | tan(a) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 15 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ | $2 - \sqrt{3}$ |
| 18 | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$ |
| 30 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |
| 36 | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ | $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 1 |
| 54 | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ |
| 60 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| 72 | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ | $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ |
| 75 | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ | $2 + \sqrt{3}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 90 | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | nicht definiert |
| 108 | $\frac{3\pi}{5}$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$ | $-\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$ |
| 120 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ |
| 135 | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | -1 |
| 180 | $\pi$ | 0 | -1 | 0 |
| 270 | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 | 0 | nicht definiert |
| 360 | $2\pi$ | 0 | 1 | 0 |

Komplexe Zahlen) i² = -1

z = Re(z) + i*Im(z) = |z| * (cos(Arg(z) + i*sin(Arg(z)); Betrag:$\sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$;
Addition: z=x+y = Re(x)+Re(y)+i*(Im(x)+(Im(y)); Multiplikation: ($a_1a_2$-$b_1b_2$, $a_1b_2$+$b_1a_2$) oder |x|*|y|*(cos(Arg(x)+Arg(y))+i*sin(Arg(x)+Arg(y))); Potenzieren:$z^n = |z|^n(\cos(n * \arg(z)) + i\sin(n * \arg(z)))$; n-te Wurzel ziehen: Genau n Wurzeln! $|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$; $\arg(w_k) = \frac{1}{n}\arg(z) + \frac{2\pi k}{n}$;
Rechenregeln: $z\bar{z} = |z|^2$;$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$; Re(z²)=Re(z)²-Im(z)²; Im(z²)=2*Re(z)*Im(z);$z + \bar{z} = 2Re(z)$;
$z - \bar{z} = i2Im(z)$; $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\arg(z) = \tan^{-1}\frac{Im(z)}{Re(z)}$; falls Re(z)<0: $\frac{\pi}{2}$addieren; Falls a=0:$\arg(z) = \pm\frac{\pi}{2}$ abh. von Vorzeichen von Im(z);
Jedes Polynom hat eine Linearfaktorzerlegung: $a_n \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ mit Nullstellen $z_j$; Bei reellen Koeffizienten treten komplexe Nullstellen immer paarweise auf; $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung); $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y|$(Inverse Dreiecksungleichung)

Vektorräume)
Eigenschaften: (V,+) ist kommutative Gruppe; Assoziativgesetz: $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$; 1*x=x
Distributivgesetze: $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$; $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$; Muss 0 enthalten!
Unterraum: $\vec{x} + \vec{y} \in U$; $\alpha\vec{x} \in U$(Abgeschlossenheit bzgl. Vektoraddition und Skalarmultiplikation)
Lösungsmenge hom. LGS ist immer UR, niemals leer (da triv. Lsg. 0); von inhom. kein UR!
$L_{inhom.}$ = {$x_o$} + $L_{hom}$; $x_0$ bel. Element von $L_{inhom.}$; => affiner Raum (um $x_0$ verschobener UR)
Basis finden: Abbildungsmatrix der Vektoren; span{Vektoren, in deren Spalte sich eine Stufe bildet}
Dimensionsformel: $U_1, U_2$ $UR$ $\mathbb{K}^n$: $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$
Direkte Summe: Darstellung jedes Elements von U auf eindeutige Weise als Summe der Elemente von $U_1$ und $U_2$; $U_1 \cap U_2 = \{0\} \Leftrightarrow \dim(U) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

Lineare Algebra)
Lineare Abbildungen: $\forall\vec{x}, \vec{y} \in U\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$; $f(0) = 0$
Lineare Fortsetzung: $f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{b_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\vec{b_i})$
Kern: Alle x, die von f(x) auf 0 abgebildet werden; Bild: alle y, auf die f(x) abbildet; beides immer Unterräume (Kern(f) Unterraum von U; Bild(f) Unterraum von V bei f: U->V)
Berechnung Kern: Abbildungsmatrix als LGS, rechte Seite 0; Berechnung Bild: Abbildungsmatrix als LGS, Umformen auf Stufenform; span{alle Vektoren, in deren Spalte sich eine Stufe bildet}; Anzahl an Stufen-/Nichtstufenspalten: dim(Bild/Kern);
f inj.⇔Kern(f)={0}=f($b_i$) sind lin. unabh.; f surj. ⇔ Bild(f)=V⇔f($b_i$) EZS von V; f bij. ⇔ f($b_i$) Basis von V

Isomorphie: Abbildung Basis auf Basis; dim(U)=dim(V); f bij. (=inj. =surj)
Matrizen: Darstellungsmatrix A zur Lin. Abb. f: Jede Spalte i = $f(e_i)$;
(f+g)(x)=f(x)+g(x)=A+B; C = M(f(g(x)) = M(f°g) = M(f)*M(g)
Inverses: Nur wenn A Typ 1 ist; $(A|E_n)$ Gauß-Umformungen bis $(E_n|A^{-1})$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Transponierte: Vertauschen von Zeilen mit Spalten; $(A^T)^T=A$; $(AB)^T=B^TA^T$; falls A inv.: $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
Rang einer Matrix = dim(Bild(f)) = Anzahl der Stufen (l. u. Vektoren); Zeilenrang = Spaltenrang;
Determinante („Volumen eines Spats"):
Eigenschaften: $V(e_1,\ldots,e_n)=1$ (Normierung); $V(a_1,\ldots,\alpha a_j,\ldots,a_n) = \alpha\, V(a_1,\ldots,a_n)$;
$V(a_1,\ldots,a_j+b,\ldots,a_n)=V(a_1,\ldots,a_n)+V(a_1,\ldots,b,\ldots,a_n)$ (Multilinearität); V=0 bei lin. abh. $a_i$; $\det(A) = \det(A^T)$;
Zeilen/Spalten vertauschen ändert Vorzeichen; $\det(\alpha A)=\alpha^n\det(A)$
Berechnung: n=3 => Sarrus-Regel; Laplace-Entwicklung nach Zeile/Spalte (möglichst viele 0): Jeweils aktuelle Zeile/Spalte streichen, aktueller Wert * Determinante des Rests (Vorzeichenmuster!);
det(AB) = det(A)*det(B); $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$; keine Formel für det(A+B)!; Vol(f(M)) = |det(A)|Vol(M)
Dreiecksmatrix: Produkt der Diagonalelemente
Quadratische Matrizen: Determinante =/= 0 ⇔Spalten/Zeilen lin. unabh. ⇔ LGS Typ 1 (genau eine Lösung) ⇔ f inj. ⇔ f surj. ⇔ f bij. ⇔ Kern(A)={0} ⇔ Bild(A)=$R^n$ ⇔ A invertierbar ⇔ Rang(A) = n

Eigenwerte:
$p(\lambda) = \det(A-\lambda)$;$Eig(\lambda)=Kern(A-\lambda E_n)$; $Eig(\lambda_1)\cap Eig(\lambda_2) = \{0\}$; Produkt aller $\lambda_i$ = det(A); Summe aller $\lambda_i$ = Summe aller Diagonaleinträge („Spur")
alg. Vielfachheit: Exponent von $\lambda_i$ in $p(\lambda)$; geo. Vfht = $\dim(Eig(\lambda_i))$; $geoVfht(\lambda_i) \leq algVfht(\lambda_i)$
Diagonalmatrix: EW sind Diagonaleinträge; ER zu EW ist $E_i$
$A = X*D*X^{-1}$ => EW(A) = EW(D) => det(A) = det(D) => ER(A) = X * ER(D) bei gleichem EW
A € $C^{nxn}$ ⇔ Basis des $C^n$ aus EV von A existiert ⇔Für alle EW von A geoVfht=algVfht
EW von A ist $EW^m$ von $A^m$, gleicher ER; ist $A = XDX^{-1}$ => $A^m = XD^mX^{-1}$;D=EW als Diagonaleinträge;X=EV als Spalten; Symmetrische Matrizen: $A^T=A$

Skalarprodukt:
Euklidisches Skalarprodukt: $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y_i} = x^T\bar{y}$; $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0$ => $\vec{x},\vec{y}$ orthogonal
Eigenschaften: $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle \geq 0$; $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$; $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \overline{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle}$; $\langle\alpha\vec{x},\beta\vec{y}\rangle = \alpha\bar{\beta}\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$; $\langle\vec{x}+\vec{y},\vec{z}\rangle = \langle\vec{x},\vec{z}\rangle + \langle\vec{y},\vec{z}\rangle$ Matrizen: $\langle A\vec{x},B\vec{y}\rangle = \langle B^T\vec{x},A^T\vec{y}\rangle$
Norm (Eigenschaften):$\|\vec{x}\| \geq 0$; $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$; $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$; $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
p-Norm:$\|\vec{x}\| = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}$; Euklidische Norm (p=2): $\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}$; Jedes Skalarprodukt erzeugt durch Wurzelziehen eine Norm; Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: $|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$
Sind alle Basisvektoren $b_i$ orthogonal zueinander, bilden sie ein Orthogonalsystem; (bei $||b_i||=1$ Orthonormalsystem); Kronecker-Symbol:$\delta_{ij} = \langle\overrightarrow{b_i},\overrightarrow{b_{ij}}\rangle = \begin{cases}1, i = j\\ 0, sonst\end{cases}$; Normalisieren durch $\frac{\overrightarrow{b_i}}{\|\overrightarrow{b_i}\|}$
Darstellung bzgl. ONB: $\vec{x} = \langle\vec{x},\overrightarrow{b_1}\rangle\overrightarrow{b_1} + \cdots + \langle\vec{x},\overrightarrow{b_n}\rangle\overrightarrow{b_n}$;
Normberechnung eines in ONB dargestellten Vektors: $\alpha_i = \langle\vec{x},\overrightarrow{b_i}\rangle$; $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$
Orthogonalprojektion: $\vec{x}_U = \sum_{i=1}^{m}\langle\vec{x},\overrightarrow{b_i}\rangle\overrightarrow{b_i}$; Schnittwinkel zweier Vektoren:$\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \cos\alpha$

$$Kern(A^T) = Bild(A)^\perp; Kern(A^T)^\perp = Bild(A); Kern(A) = Bild(A^T)^\perp; Kern(A)^\perp = Bild(A^T)$$

Formeln: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\sum_{k=0}^{n} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$(Geom. Reihe)