

# Theorie der Programmierung

## Übung 04 — Konfluenz und kritische Paare

Leon Vatthauer

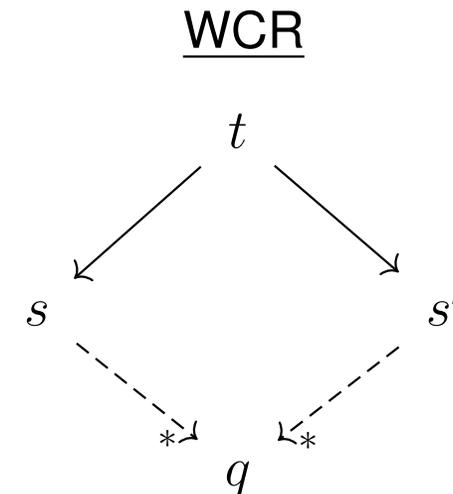
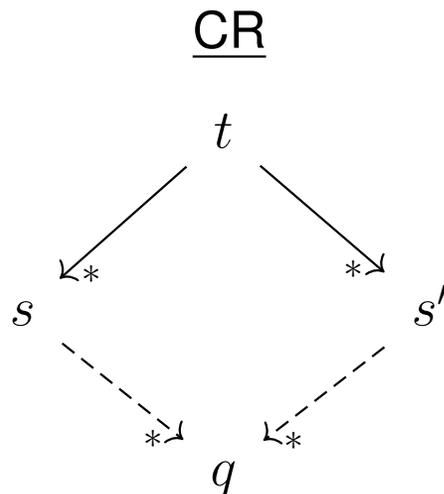
23. Mai 2025

Sei  $T$  ein TES.

1. Terme  $s, s'$  heißen **zusammenführbar** (zf.), wenn ein  $q$  existiert, sodass  $s \rightarrow^* q$  und  $s' \rightarrow^* q$
2.  $T$  heißt **konfluent** (CR), wenn für alle Terme  $t, s, s'$  mit  $t \rightarrow^* s, t \rightarrow^* s'$  die Terme  $s, s'$  zf. sind.
3.  $T$  heißt **lokal konfluent** (WCR), wenn für alle Terme  $t, s, s'$  mit  $t \rightarrow s, t \rightarrow s'$  die Terme  $s, s'$  zf. sind.

Sei  $T$  ein TES.

1. Terme  $s, s'$  heißen **zusammenführbar** (zf.), wenn ein  $q$  existiert, sodass  $s \rightarrow^* q$  und  $s' \rightarrow^* q$
2.  $T$  heißt **konfluent** (CR), wenn für alle Terme  $t, s, s'$  mit  $t \rightarrow^* s, t \rightarrow^* s'$  die Terme  $s, s'$  zf. sind.
3.  $T$  heißt **lokal konfluent** (WCR), wenn für alle Terme  $t, s, s'$  mit  $t \rightarrow s, t \rightarrow s'$  die Terme  $s, s'$  zf. sind.



# Newman's Lemma und kritische Paare

## Newman's Lemma

$SN \wedge WCR \Rightarrow CR$

# Newman's Lemma und kritische Paare

## Newman's Lemma

$SN \wedge WCR \Rightarrow CR$

## Kritisches Paar

Betrachte zwei Regeln  $l_1 \rightarrow_0 r_1$  und  $l_2 \rightarrow_0 r_2$  mit  $FV(l_1) \cap FV(l_2) = \emptyset$  (ggf. durch Umbenennung der Variablen).

Finde einen Term  $t$  (*nicht nur Variable!*) mit  $l_1 = C(t)$ , sodass  $\sigma = mgu(t, l_2)$ .

Dann ist  $(r_1\sigma, C(r_2)\sigma)$  ein kritisches Paar.

# Newman's Lemma und kritische Paare

## Newman's Lemma

$SN \wedge WCR \Rightarrow CR$

## Kritisches Paar

Betrachte zwei Regeln  $l_1 \rightarrow_0 r_1$  und  $l_2 \rightarrow_0 r_2$  mit  $FV(l_1) \cap FV(l_2) = \emptyset$  (ggf. durch Umbenennung der Variablen).

Finde einen Term  $t$  (*nicht nur Variable!*) mit  $l_1 = C(t)$ , sodass  $\sigma = mgu(t, l_2)$ .

Dann ist  $(r_1\sigma, C(r_2)\sigma)$  ein kritisches Paar.

## Triviales kritisches Paar

Ein kritisches Paar  $(r_1\sigma, C(r_2)\sigma)$  heißt *trivial*, wenn die Ersetzungsregeln bis auf Umbenennung gleich sind und  $C(\cdot) = (\cdot)$

# Newman's Lemma und kritische Paare

## Newman's Lemma

$SN \wedge WCR \Rightarrow CR$

## Kritisches Paar

Betrachte zwei Regeln  $l_1 \rightarrow_0 r_1$  und  $l_2 \rightarrow_0 r_2$  mit  $FV(l_1) \cap FV(l_2) = \emptyset$  (ggf. durch Umbenennung der Variablen).

Finde einen Term  $t$  (*nicht nur Variable!*) mit  $l_1 = C(t)$ , sodass  $\sigma = mgu(t, l_2)$ .

Dann ist  $(r_1\sigma, C(r_2)\sigma)$  ein kritisches Paar.

## Triviales kritisches Paar

Ein kritisches Paar  $(r_1\sigma, C(r_2)\sigma)$  heißt *trivial*, wenn die Ersetzungsregeln bis auf Umbenennung gleich sind und  $C(\cdot) = (\cdot)$

## Critical Pair Lemma

Ein Termersetzungssystem  $T$  ist genau dann lokal konfluent (WCR), wenn in  $T$  alle (nicht triviale) kritische Paare zf. sind.

# Aufgabe 1

## Kritische Paare berechnen

---

Wir betrachten erneut das Termersetzungssystem aus Blatt 2, Aufgabe 1:

$$a \cdot x \rightarrow_0 b \cdot (c \cdot x) \tag{1}$$

$$c \cdot (d \cdot x) \rightarrow_0 b \cdot (c \cdot x) \tag{2}$$

$$b \cdot (x \cdot y) \rightarrow_0 a \cdot (d \cdot x) \tag{3}$$

$$b \cdot (b \cdot x) \rightarrow_0 d \cdot x \tag{4}$$

Bestimmen Sie nun alle kritischen Paare des Systems und geben Sie dazu jeweils die involvierten Regeln sowie den entsprechenden allgemeinsten Unifikator an.

# Aufgabe 1

## Kritische Paare berechnen

Wir betrachten erneut das Termersetzungssystem aus Blatt 2, Aufgabe 1:

$$a \cdot x \rightarrow_0 b \cdot (c \cdot x) \quad (1)$$

$$c \cdot (d \cdot x) \rightarrow_0 b \cdot (c \cdot x) \quad (2)$$

$$b \cdot (x \cdot y) \rightarrow_0 a \cdot (d \cdot x) \quad (3)$$

$$b \cdot (b \cdot x) \rightarrow_0 d \cdot x \quad (4)$$

Bestimmen Sie nun alle kritischen Paare des Systems und geben Sie dazu jeweils die involvierten Regeln sowie den entsprechenden allgemeinsten Unifikator an.

### Kritisches Paar

Betrachte zwei Regeln  $l_1 \rightarrow_0 r_1$  und  $l_2 \rightarrow_0 r_2$  mit  $FV(l_1) \cap FV(l_2) = \emptyset$  (ggf. durch Umbenennung der Variablen).

Finde einen Term (*nicht nur Variable!*) mit  $l_1 = C(t)$ , sodass  $\sigma = mgu(t, l_2)$ .

Dann ist  $(r_1\sigma, C(r_2)\sigma)$  ein kritisches Paar.

# Aufgabe 2

## Konfluenz mittels Newman's Lemma

---

Wir betrachten erneut das Termersetzungssystem aus Blatt 3, Übung 1:

$$x \oplus (y \odot z) \rightarrow_0 (x \oplus y) \odot (x \oplus z) \tag{5}$$

$$(x \odot y) \odot z \rightarrow_0 x \odot (y \odot z) \tag{6}$$

Nun möchten wir zeigen, dass es konfluent ist. Da wir bereits gezeigt haben, dass das System SN ist, genügt es nach Newman's Lemma zu zeigen, dass es *lokal konfluent* ist.

Ihre Aufgabe ist es also, die lokale Konfluenz des Systems zu zeigen, d.h. alle kritischen Paare des Systems zu bestimmen und anschließend für jedes Paar zu zeigen, dass es zusammengeführt werden kann.

# Aufgabe 2

## Konfluenz mittels Newman's Lemma

Wir betrachten erneut das Termersetzungssystem aus Blatt 3, Übung 1:

$$x \oplus (y \odot z) \rightarrow_0 (x \oplus y) \odot (x \oplus z) \tag{5}$$

$$(x \odot y) \odot z \rightarrow_0 x \odot (y \odot z) \tag{6}$$

Nun möchten wir zeigen, dass es konfluent ist. Da wir bereits gezeigt haben, dass das System SN ist, genügt es nach Newman's Lemma zu zeigen, dass es *lokal konfluent* ist.

Ihre Aufgabe ist es also, die lokale Konfluenz des Systems zu zeigen, d.h. alle kritischen Paare des Systems zu bestimmen und anschließend für jedes Paar zu zeigen, dass es zusammengeführt werden kann.

### Kritisches Paar

Betrachte zwei Regeln  $l_1 \rightarrow_0 r_1$  und  $l_2 \rightarrow_0 r_2$  mit  $FV(l_1) \cap FV(l_2) = \emptyset$  (ggf. durch Umbenennung der Variablen).

Finde einen Term (*nicht nur Variable!*) mit  $l_1 = C(t)$ , sodass  $\sigma = mgu(t, l_2)$ .

Dann ist  $(r_1\sigma, C(r_2)\sigma)$  ein kritisches Paar.