Friedrich-Alexander-Universität
Technische Fakultät

Theorie der Programmierung

Übung 02 — Termersetzung, Kontexte und Ordnungen

Leon Vatthauer

9. Mai 2025

Terme

Recall: Terme

Sei Σ eine Menge von Funktionssymbolen. Wir schreiben $f/n \in \Sigma$ für ein n-stelliges Funktionssymbol.
Terme über Σ und einer Menge von Variablen V sind definiert als:

$$t ::= x \mid f(t_1, \ldots, t_n) \qquad (x \in V, f/n \in \Sigma).$$

Terme

Recall: Terme

Sei Σ eine Menge von Funktionssymbolen. Wir schreiben $f/n \in \Sigma$ für ein n-stelliges Funktionssymbol. **Terme** über Σ und einer Menge von Variablen V sind definiert als:

$$t ::= x \mid f(t_1, \ldots, t_n) \qquad (x \in V, f/n \in \Sigma).$$

Wir schreiben $T_\Sigma(V)$ für die Menge aller Terme über V.

Terme

Recall: Terme

Sei Σ eine Menge von Funktionssymbolen. Wir schreiben $f/n \in \Sigma$ für ein n-stelliges Funktionssymbol. **Terme** über Σ und einer Menge von Variablen V sind definiert als:

$$t ::= x \mid f(t_1, \ldots, t_n) \qquad (x \in V, f/n \in \Sigma).$$

Wir schreiben $T_\Sigma(V)$ für die Menge aller Terme über V.

Kontexte

- Ein **Kontext** ist ein Term $C(\cdot)$ mit *genau einer* Freistelle $(\cdot)$:

$$C(\cdot) ::= (\cdot) \mid f(t_1, \ldots, t_{i-1}, C(\cdot), t_{i+1}, \ldots, t_n) \qquad (f/n \in \Sigma, 1 \leq i \leq n).$$

Terme

Recall: Terme

Sei Σ eine Menge von Funktionssymbolen. Wir schreiben $f/n \in \Sigma$ für ein n-stelliges Funktionssymbol. **Terme** über Σ und einer Menge von Variablen V sind definiert als:

$$t ::= x \mid f(t_1, \ldots, t_n) \qquad (x \in V, f/n \in \Sigma).$$

Wir schreiben $T_\Sigma(V)$ für die Menge aller Terme über V.

Kontexte

- Ein **Kontext** ist ein Term $C(\cdot)$ mit *genau einer* Freistelle $(\cdot)$:

$$C(\cdot) ::= (\cdot) \mid f(t_1, \ldots, t_{i-1}, C(\cdot), t_{i+1}, \ldots, t_n) \qquad (f/n \in \Sigma, 1 \leq i \leq n).$$

- $C(t)$ ist das Resultat des **Einsetzens** eines Terms t in einen Kontext $C(\cdot)$, definiert durch:

$$(\cdot)(t) = t$$

$$f(t_1, \ldots, C(\cdot), \ldots, t_n)(t) = f(t_1, \ldots, C(t), \ldots, t_n)$$

Termersetzungssysteme

Definition

Termersetzungssystem

Ein **Termersetzungssystem (TES)** ist eine Relation

$$\to_0 \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V);$$

die Elemente von $\to_0$ nennen wir **Ersetzungsregeln**.

Termersetzungssysteme

Definition

Termersetzungssystem

Ein **Termersetzungssystem (TES)** ist eine Relation

$$\to_0 \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V);$$

die Elemente von $\to_0$ nennen wir **Ersetzungsregeln**.

Kontextabschluss

Eine Relation $\to \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ heißt

- **abgeschlossen** bezüglich eines Kontexts $C(\cdot)$, wenn

$$t \to s \Rightarrow C(t) \to C(s);$$

Termersetzungssysteme

Definition

Termersetzungssystem

Ein **Termersetzungssystem (TES)** ist eine Relation

$$\to_0 \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V);$$

die Elemente von $\to_0$ nennen wir **Ersetzungsregeln**.

Kontextabschluss

Eine Relation $\to \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ heißt

- **abgeschlossen** bezüglich eines Kontexts $C(\cdot)$, wenn

$$t \to s \Rightarrow C(t) \to C(s);$$

- **kontextabgeschlossen**, wenn sie abgeschlossen bzgl. aller Kontexte ist;

Termersetzungssysteme

Definition

Termersetzungssystem

Ein **Termersetzungssystem (TES)** ist eine Relation

$$\to_0 \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V);$$

die Elemente von $\to_0$ nennen wir **Ersetzungsregeln**.

Kontextabschluss

Eine Relation $\to \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ heißt

- **abgeschlossen** bezüglich eines Kontexts $C(\cdot)$, wenn
$$t \to s \Rightarrow C(t) \to C(s);$$
- **kontextabgeschlossen**, wenn sie abgeschlossen bzgl. aller Kontexte ist;
- **stabil**, wenn für jede Substitution σ
$$t \to s \Rightarrow (t\sigma) \to (s\sigma).$$

Termersetzungssysteme

Definition

Termersetzungssystem

Ein **Termersetzungssystem (TES)** ist eine Relation

$$\to_0 \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V);$$

die Elemente von $\to_0$ nennen wir **Ersetzungsregeln**.

Kontextabschluss

Eine Relation $\to \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ heißt

- **abgeschlossen** bezüglich eines Kontexts $C(\cdot)$, wenn

$$t \to s \Rightarrow C(t) \to C(s);$$

- **kontextabgeschlossen**, wenn sie abgeschlossen bzgl. aller Kontexte ist;
- **stabil**, wenn für jede Substitution σ

$$t \to s \Rightarrow (t\sigma) \to (s\sigma).$$

Termersetzungssysteme

Reduktionsrelationen

Einschrittreduktion

Die **Einschrittreduktion** $\rightarrow \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ ist der kontextabgeschlossene und stabile Abschluss von $\rightarrow_0$, d.h.

$$t \rightarrow_0 s \Rightarrow C(t\sigma) \rightarrow C(s\sigma),$$

für alle Kontexte $C(\cdot)$ und Substitutionen σ.

Termersetzungssysteme

Reduktionsrelationen

Einschrittreduktion

Die **Einschrittreduktion** $\rightarrow \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ ist der kontextabgeschlossene und stabile Abschluss von $\rightarrow_0$, d.h.

$$t \rightarrow_0 s \Rightarrow C(t\sigma) \rightarrow C(s\sigma),$$

für alle Kontexte $C(\cdot)$ und Substitutionen σ.

Reduktionsrelation

Die **Reduktionsrelation** $\rightarrow^* \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ ist der transitiv-reflexive Abschluss von $\rightarrow$.

Termersetzungssysteme

Reduktionsrelationen

Einschrittreduktion

Die **Einschrittreduktion** $\rightarrow \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ ist der kontextabgeschlossene und stabile Abschluss von $\rightarrow_0$, d.h.

$$t \rightarrow_0 s \Rightarrow C(t\sigma) \rightarrow C(s\sigma),$$

für alle Kontexte $C(\cdot)$ und Substitutionen σ.

Reduktionsrelation

Die **Reduktionsrelation** $\rightarrow^* \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ ist der transitiv-reflexive Abschluss von $\rightarrow$.

Normalformen

- Ein Term t heißt **normal**, wenn t nicht reduziert werden kann, d.h. wenn kein s mit $t \rightarrow s$ existiert. Wir schreiben $t \not\rightarrow$.
- Ein Term s heißt **Normalform** eines Terms t, wenn s normal ist und $t \rightarrow^* s$.

Normalisierungseigenschaften

Ein Term t heißt

- **schwach normalisierend (WN)**, wenn t eine Normalform besitzt.
- **stark normalisierend (SN)**, wenn t eine Normalform besitzt und es keine unendliche Reduktionssequenz $t \to t' \to t'' \to \ldots$ gibt.

Ein TES $(\Sigma, \to_0)$ ist WN/SN, wenn jeder Term WN/SN in $\to$ ist.

Aufgabe 1

Termersetzung

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = \{a/0, b/0, c/0, d/0, \cdot/2\}$. Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem:

$$
\begin{aligned}
a \cdot x &\to_0 b \cdot (c \cdot x) && (1)\\
c \cdot (d \cdot x) &\to_0 b \cdot (c \cdot x) && (2)\\
b \cdot (x \cdot y) &\to_0 a \cdot (d \cdot x) && (3)\\
b \cdot (b \cdot x) &\to_0 d \cdot x && (4)
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, dass dieses System nicht stark normalisierend ist.

Aufgabe 1

Termersetzung

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = \{a/0, b/0, c/0, d/0, \cdot/2\}$. Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem:

$$
\begin{aligned}
a \cdot x &\to_0 b \cdot (c \cdot x) && (1)\\
c \cdot (d \cdot x) &\to_0 b \cdot (c \cdot x) && (2)\\
b \cdot (x \cdot y) &\to_0 a \cdot (d \cdot x) && (3)\\
b \cdot (b \cdot x) &\to_0 d \cdot x && (4)
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, dass dieses System nicht stark normalisierend ist.

Normalisierungseigenschaften

Ein Term t heißt

- **schwach normalisierend (WN)**, wenn t eine Normalform besitzt.
- **stark normalisierend (SN)**, wenn t eine Normalform besitzt und es keine unendliche Reduktionssequenz $t \to t' \to t'' \to \ldots$ gibt.

Ein TES $(\Sigma, \to_0)$ ist WN/SN, wenn jeder Term WN/SN in $\to$ ist.

Aufgabe 2

Terme im Kontext

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = \{\triangle/2, c/0\}$. Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem:

$$
\begin{aligned}
x_1 \triangle c &\to_0 c && (5)\\
x_1 \triangle (x_2 \triangle x_3) &\to_0 (x_1 \triangle x_2) \triangle x_3 && (6)\\
c \triangle x_1 &\to_0 x_1 && (7)
\end{aligned}
$$

1. Geben Sie die Grammatik für Σ-Kontexte an.

Aufgabe 2

Terme im Kontext

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = \{\triangle/2, c/0\}$. Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem:

$$x_1 \triangle c \to_0 c \tag{5}$$

$$x_1 \triangle (x_2 \triangle x_3) \to_0 (x_1 \triangle x_2) \triangle x_3 \tag{6}$$

$$c \triangle x_1 \to_0 x_1 \tag{7}$$

1. Geben Sie die Grammatik für Σ-Kontexte an.
2. Sei $t = x_1 \triangle (c \triangle x_2)$. Wie viele (und welche) Normalformen besitzt t?

Aufgabe 2

Terme im Kontext

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = \{\triangle/2, c/0\}$. Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem:

$$x_1 \triangle c \to_0 c \tag{5}$$
$$x_1 \triangle (x_2 \triangle x_3) \to_0 (x_1 \triangle x_2) \triangle x_3 \tag{6}$$
$$c \triangle x_1 \to_0 x_1 \tag{7}$$

1. Geben Sie die Grammatik für Σ-Kontexte an.
2. Sei $t = x_1 \triangle (c \triangle x_2)$. Wie viele (und welche) Normalformen besitzt t?
3. Geben Sie einen Kontext an, für den t lediglich eine Normalform besitzt.

Aufgabe 2

Terme im Kontext

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = \{\triangle/2, c/0\}$. Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem:

$$x_1 \triangle c \to_0 c \tag{5}$$
$$x_1 \triangle (x_2 \triangle x_3) \to_0 (x_1 \triangle x_2) \triangle x_3 \tag{6}$$
$$c \triangle x_1 \to_0 x_1 \tag{7}$$

1. Geben Sie die Grammatik für Σ-Kontexte an.
2. Sei $t = x_1 \triangle (c \triangle x_2)$. Wie viele (und welche) Normalformen besitzt t?
3. Geben Sie einen Kontext an, für den t lediglich eine Normalform besitzt.
4. Wir erweitern das System um die Regel

   $$(x_1 \triangle x_2) \triangle c \to_0 x_1 \triangle (x_2 \triangle c). \tag{8}$$

   Besitzt das entstandene System eine Normalisierungseigenschaft? Begründen Sie informell Ihre Aussage.

Strikte Ordnungen

Eigenschaften von Relationen

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Relation. R heißt

- **Präordnung**, wenn R reflexiv und transitiv ist;
- **Äquivalenz**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist;
- **Irreflexiv**, wenn für alle $x \in X$ gilt $\neg(xRx)$;
- **Strikte Ordnung**, wenn R irreflexiv und transitiv ist;
- **Asymmetrisch**, wenn $xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Aufgabe 3

Strikte Ordnungen

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Relation.

1. Zeigen Sie, dass eine strikte Ordnung asymmetrisch ist.

Eigenschaften von Relationen

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Relation. R heißt

- **Präordnung**, wenn R reflexiv und transitiv ist;
- **Äquivalenz**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist;
- **Irreflexiv**, wenn für alle $x \in X$ gilt $\neg(xRx)$;
- **Strikte Ordnung**, wenn R irreflexiv und transitiv ist;
- **Asymmetrisch**, wenn $xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Aufgabe 3

Strikte Ordnungen

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Relation.

1. Zeigen Sie, dass eine strikte Ordnung asymmetrisch ist.
2. Zeigen Sie, dass eine asymmetrische und transitive Relation eine strikte Ordnung ist.

Eigenschaften von Relationen

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Relation. R heißt

- **Präordnung**, wenn R reflexiv und transitiv ist;
- **Äquivalenz**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist;
- **Irreflexiv**, wenn für alle $x \in X$ gilt $\neg(xRx)$;
- **Strikte Ordnung**, wenn R irreflexiv und transitiv ist;
- **Asymmetrisch**, wenn $xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ für alle $x, y \in X$ gilt.